

CCP PSI 2006 Ph2 Pb de physique : A propos du haut-parleur

II. Ondes sonores

A) Equation des ondes sonores :

A1a) Notons pour commencer que les valeurs numériques données en début d'énoncé entraînent une température d'environ 280 K. Les valeurs de γ , χ et P_0 sont incompatibles avec le modèle du gaz parfait. De plus, comme la pression et la masse volumique au repos sont considérées uniformes, cela sous-entend que la pesanteur est négligée (il aurait été préférable de l'écrire clairement dans l'énoncé). L'équation d'Euler vectorielle s'écrit donc :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \right] = -\text{grad } P \quad (\text{E1})$$

$$\mathbf{A1b)} \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{E2})$$

$$\mathbf{A1c)} \quad \chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s, \text{ ou encore } \chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (\text{E3})$$

A2a) Approximation acoustique : p/P_0 , μ/ρ , v/c et ξ/λ (c_0 = vitesse caractéristique de l'onde) sont des infiniment petits du 1^{er} ordre.

A2b) (E1), (E2) et (E3) deviennent (cf cours) :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (\text{E4})$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (\text{E5})$$

$$\mu = \rho_0 \chi p \quad (\text{E6})$$

$$\mathbf{A3a)} \quad \text{On combine ces 3 équations et on trouve } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathbf{A3b)} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \quad c_0 = 343 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{A3c)} \quad \text{Modèle du gaz parfait : } P \rho^{-\gamma} = \text{Cte}, \text{ d'où } \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \chi = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (\text{incompatible avec les valeurs numériques de l'énoncé !!}). \text{ Finalement, } c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

B) Cas de l'onde sonore plane progressive sinusoïdale :

B1a) Comme démontré en cours, l'OPPS a une structure longitudinale.

B1b) Exemples d'ondes planes longitudinales : onde de déplacement longitudinal dans un ressort massique, onde de courant dans une ligne électrique bifilaire

Exemples d'ondes planes transversales : onde de déplacement dans une corde de guitare, champ E ou B d'une onde électromagnétique, onde de tension dans une ligne bifilaire.

B2a) Notons une grosse maladresse dans l'énoncé : $\underline{p}(x)$ devrait plutôt s'écrire $\underline{p}(x,t)$!!

$$\text{L'équation de d'Alembert donne : } (-jk)^2 \underline{p} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2} \underline{p} = 0, \text{ d'où la « relation de dispersion » } k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}.$$

B2b) (E5) et (E6) donnent $j k \underline{v} = \chi j \omega \underline{p}$, d'où $\underline{p} = \rho_0 c_0 \underline{v}$. La surpression et la vitesse sont en phase (pour l'onde se propageant dans le sens des x croissants).

B3a) Nouvelle maladresse de l'énoncé : P désigne à la fois la pression totale et la puissance !! Le vecteur $\underline{R}$ se nomme vecteur densité de flux de puissance sonore (ou vecteur densité de courant énergétique)

$$R = \langle \rho_0 c_0 v^2 \rangle = \left\langle \frac{p^2}{\rho_0 c_0} \right\rangle \quad \text{puis} \quad R = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c_0}.$$

B3b) $R = \langle p v \rangle$ d'où

C) Source sonore sinusoïdale :

C1) Le terme e^{-jkl} exprime le déphasage dû à la propagation.

Le terme $1/l$ est lié au fait que les ondelettes ré-émises sont sphériques.

Et le $2\pi r dr$ vient du fait que l'amplitude de l'ondelette ré-émise est proportionnelle à la surface d'émission.

C2) $\underline{p}(x) = \int_0^a K \underline{p}(C) \frac{e^{-jkl}}{l} 2\pi r dr$, et $l^2 = r^2 + x^2$, donc $2l dl = 2r dr$, ou encore $r dr / l = dl$.

Il vient $\underline{p}(x) = 2\pi K \underline{p}(C) \int_x^{\sqrt{x^2+a^2}} e^{-jkl} dl$, puis $\underline{p}(x) = \frac{2\pi K \underline{p}(C)}{-jk} \left[e^{-jk\sqrt{a^2+x^2}} - e^{-jkx} \right]$, ce qui est bien conforme au résultat donné.

C3a) Puisqu'on nous dit de prendre $2\pi K = jk$, il vient $\underline{\alpha} = -\underline{p}(C)$ et

$$\underline{p}(x) = -\underline{p}(C) \left[e^{-jkx\sqrt{1+a^2/x^2}} - e^{-jkx} \right] \approx -\underline{p}(C) \left[e^{-jkx\left(1+\frac{a^2}{2x^2}\right)} - e^{-jkx} \right] \quad \text{puisque } x \gg a.$$

On factorise : $\underline{p}(x) \approx -\underline{p}(C) e^{-jkx} \left[e^{-j\frac{ka^2}{2x}} - 1 \right]$. De plus, $k = 2\pi/\lambda$. Et puisque $a^2 \ll \lambda x$, il vient

$$\underline{p}(x) \approx -\underline{p}(C) e^{-jkx} \left[-j\frac{ka^2}{2x} \right], \quad \left| \underline{p}(x) \right| \approx \left| \underline{p}(C) \right| \frac{ka^2}{2x} = \left| \underline{p}(C) \right| \frac{\pi |K| a^2}{x}.$$

C3b) Onde plane sur la membrane, d'où $\underline{p}(C) = \rho_0 c_0 j \omega \underline{u}$.

C3c) On remplace : $\left| \underline{p}(x) \right| \approx \frac{\rho_0 c_0 \omega u_0 \pi |K| a^2}{x} = \frac{\rho_0 c_0 \omega u_0 \pi a^2}{x c_0 2\pi / \omega}$, d'où $\left| \underline{p}(x) \right| \approx \frac{\rho_0 \omega^2 u_0 a^2}{2x}$.

C4a) $R = R_0 10^{(1/10)} = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c_0} = \frac{\rho_0^2 u_0^2 \omega^4 a^4}{4 x^2 2 \rho_0 c_0}$ $R_0 10^{(1/10)} = \frac{\rho_0 u_0^2 \omega^4 a^4}{8 x^2 c_0}$,

d'où $u_0 = \frac{2x \sqrt{2 c_0 R_0} 10^{(1/20)}}{\omega^2 a^2 \sqrt{\rho_0}} = \frac{x \sqrt{c_0 R_0} 10^{(1/20)}}{\pi^2 f^2 a^2 \sqrt{2 \rho_0}}$. Pour $f = 2 \text{ kHz}$, $u_0 = 10 \text{ } \mu\text{m}$ et pour $f = 100 \text{ Hz}$, $u_0 = 4,2 \text{ mm}$.

C4b) R est en $f^4 a^4$, donc aux basses fréquences, si on veut une puissance sonore semblable à celles des hautes fréquences, il faut une membrane de grand rayon (a grand)

III. Aspects directionnels

A) Directivité du haut-parleur :

A1) ??? Si le haut-parleur a une membrane circulaire (et non rectangulaire), les calculs ne se font pas analytiquement : il faut recourir aux fonctions de Bessel !! Néanmoins, nous pouvons dégager des ordres de grandeur.

On peut prendre par exemple pour cas limite un point M se trouvant sur l'axe Cy et chercher la condition pour que l'intensité y soit nulle. Il faut grossièrement que le déphasage soit de 2π entre l'onde provenant du bas du disque ($y = -a_{\max}$) et celle provenant du haut du disque ($y = +a_{\max}$), car les vecteurs de Fresnel associés à toutes les ondes (entre ces deux extrêmes) formeraient un « éventail » complet, avec une somme vectorielle nulle.. Ce raisonnement serait juste pour une membrane rectangulaire ...

En tout cas, cela donne $2a_{\max} = \lambda$, ou encore $a_{\max} = c_0 / (2f)$.

A2) Pour $f = 2$ kHz, $a_{\max} = 8,5$ cm et pour $f = 100$ Hz, $a_{\max} = 1,7$ m.

A3) Si on veut pouvoir entendre les sons sans être bien en face des haut-parleurs, on a intérêt à prendre des membranes pas trop grosses. Mais on a vu au IIC4 que la puissance sonore était en a^4 , donc on ne peut pas prendre trop petit non plus. Pour les basses, on voit qu'on peut se permettre de prendre des membranes plus larges, pour augmenter la puissance émise, sans que cela rende le son trop directif.

B) Directivité d'une colonne de haut-parleurs :

B1a) Tout d'abord une remarque : si le son émis lors du spectacle est purement sinusoïdal, j'espère que les billets ne sont pas trop chers !! Si j'étais spectateur, j'exigerais le remboursement !!

$$\delta_{2/1} = b \sin \theta, \text{ donc } \phi_{2/1} = \frac{2\pi b f \sin \theta}{c_0}.$$

$$\text{B1b)} \quad \underline{s}_k(M) = \underline{s}_1(M) e^{-j(k-1)\phi_{2/1}}$$

$$\text{B1c)} \quad \underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) \sum_{k=1}^{10} e^{-j(k-1)\phi_{2/1}} = \underline{s}_1(M) \frac{1 - e^{-10j\phi_{2/1}}}{1 - e^{-j\phi_{2/1}}}$$

$$\text{B2a)} \quad \underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) e^{-j(4,5)\phi_{2/1}} \frac{2j \sin(5\phi_{2/1})}{2j \sin(0,5\phi_{2/1})} \quad \text{puis} \quad \underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) e^{-j(4,5)\phi_{2/1}} \frac{\sin\left(\frac{10\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}, \text{ et enfin}$$

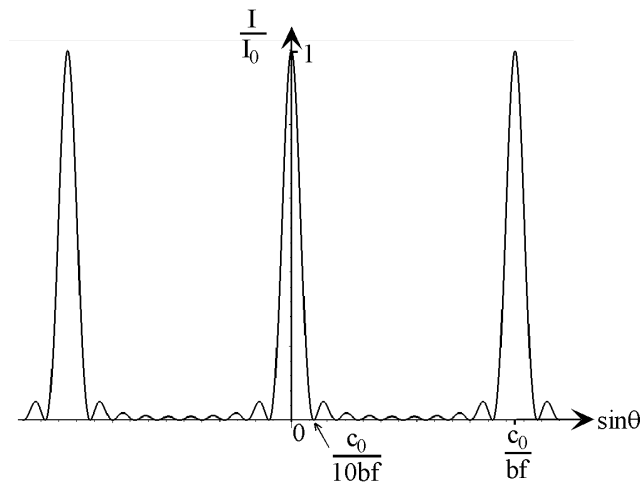
$$I(\theta) = \gamma \underline{s}(\theta) \underline{s}^*(\theta) = \gamma \left| \underline{s}_1(\theta) \right|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{10\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}.$$

Or, quand $\theta \rightarrow 0$, la fraction tend vers 100 (on le trouve en

travaillant avec des équivalents autour de 0). Ainsi, $I_0 = I(0) = 100\gamma \left| \underline{s}_1(0) \right|^2$. Et $\left| \underline{s}_1(\theta) \right| = \left| \underline{s}_1(0) \right|$ si les haut-parleurs peuvent être considérés comme ponctuels. Avec tous ces éléments, on retombe bien sur la

$$I(\theta) = \frac{I_0}{100} \frac{\sin^2\left(\frac{10\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi b f \sin \theta}{c_0}\right)}$$

formule de l'énoncé :



B2b)

B3a) $I = 0$ pour $\sin \theta_i = i \frac{c_0}{10bf}$, $i \in \mathbb{Z}$, et i non multiple de 10.

B3b) $\theta_1 = 6,6^\circ$ $\theta_2 = 13^\circ$ $\theta_3 = 20^\circ$

B4) Ouf, il y a de la musique. J'espère non sinusoïdale pure !! Et c'est pour cela qu'il n'y a pas d'extinctions.

B5a) $1 = \sin \theta_1 = \frac{c_0}{10bf_c}$ pour $f_c = \frac{c_0}{10b} = 114 \text{ Hz}$.

B5b) Les sons graves, de fréquence $< 114 \text{ Hz}$, seront audibles pour tout angle. Mais ce ne sera pas le cas des sons aigus, c'est-à-dire de fréquence $> 114 \text{ Hz}$.