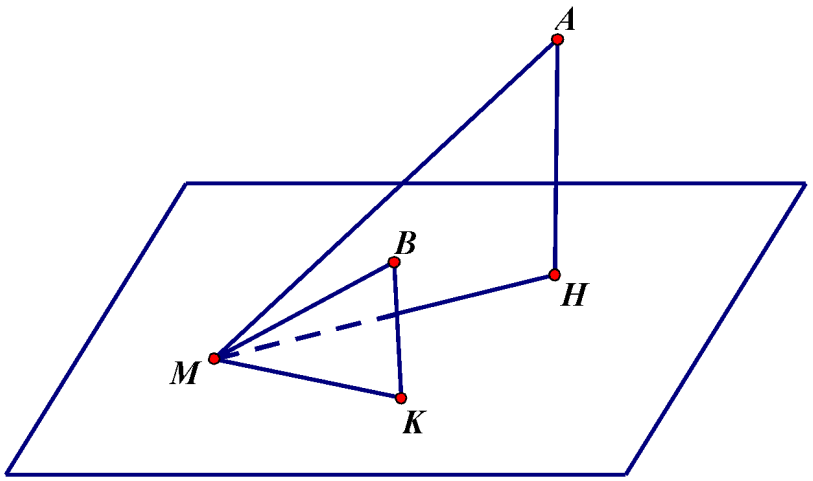
Câu 48. **[2H3-2.6-4] (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z-12=0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn (ω) cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

A. -4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α), khi đó:

$$AH = d\left(A;(\alpha)\right) = \frac{\left|2.10+2.6+(-2)-12\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 6;$$

$$BK = d\left(B;(\alpha)\right) = \frac{\left|2.5+2.10+(-9)-12\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3.$$

Vì MA, MB với (α) các góc bằng nhau nên $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow (x-10)^2+(y-6)^2+(z+2)^2 = 4\left[(x-5)^2+(y-10)^2+(z+9)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{20}{3}x-\frac{68}{3}y+\frac{68}{3}z+228=0.$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3};\frac{34}{3};-\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R=2\sqrt{10}$.

Do đó, đường tròn (ω) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α), nên tâm J của đường tròn D là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là $\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình: $\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ z = -\frac{38}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $J = \left(2;10;-\frac{38}{3}\right)$.