ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPÉRIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPÉRIEURE D'OPTIQUE
Concours d'Admission 1988

M

PHYSIQUE I
(4 pages dactylographiées)

*Les vecteurs sont représentés par des lettres grasses sans flèche. (Exemple **B** à la place de B)* [1].

Le but de ce problème est l'étude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique faiblement inhomogène pour deux configurations géométriques particulières. Une application est esquissée en direction des problèmes du confinement d'un plasma (gaz ionisé à très haute température qu'on cherche, malgré l'agitation thermique, à garder dans un volume clos mais en l'absence de parois matérielles). On présente la configuration magnétique tokamak qui constitue une des voies les plus prometteuses pour la réalisation d'un réacteur thermonucléaire.

QUESTION I.

En l'absence de champ électrostatique, et en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{u}_z$ orienté selon l'axe Oz d'un référentiel galiléen, on étudie le mouvement d'une particule chargée de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$.

a) Écrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le repère $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ lié au référentiel galiléen précédent.

b) En déduire les équations différentielles portant sur x, v_x, y, v_y [2]. On introduira la pulsation cyclotron $\omega_c = |q|B/m$, et on posera $\varepsilon = q/|q|$.

c) Résoudre le système en notation complexe ; l'origine des phases sera déterminée de manière qu'au temps $t = 0$ on ait $v_x = v_\perp$ (constante > 0), $v_y = 0$. On pourra dans la suite adopter pour toute vitesse $\vec{v}$ la décomposition $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_\perp$ où $\vec{v}_{//}$ est la composante de $\vec{v}$ parallèle au champ $\vec{B}$ (ici $v_{//} = v_z$) et $\vec{v}_\perp$ la composante du vecteur vitesse dans un plan orthogonal à $\vec{B}$ (ici $\vec{v}_\perp = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$).

d) Donner alors les équations du mouvement. On fera apparaître le "rayon de Larmor" $\rho_L = v_\perp/\omega_c$ et les coordonnées (x_G, y_G, z_G) d'un point appelé "centre guide du mouvement", noté G et défini à chaque instant comme le projeté de la position de la particule sur l'axe du cylindre sur lequel s'enroule la trajectoire. Faire un schéma indiquant un sens pour $\vec{B}$, l'allure de la trajectoire, le sens de parcours sur celle-ci suivant le signe de q ainsi que la trajectoire du centre guide G. (On prendra $B > 0$, $v_z > 0$).

e) Application numérique : $B = 5\,\mathrm{T}$, $\frac{1}{2}mv_\perp^2 = 10\,\mathrm{keV}$. Calculer ρ_L et ω_c pour un électron ($m_e = 9{,}1.10^{-31}\,\mathrm{kg}$) et pour un proton ($m = m_H = 1{,}67.10^{-27}\,\mathrm{kg}$).

QUESTI0N II.

Au champ magnétique précédent s'ajoute maintenant un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire. On choisira l'axe $\vec{u}_z$ toujours suivant $\vec{B}$ et l'axe $\vec{u}_x$ de manière que $E_y = 0$.

a) Résoudre les nouvelles équations du mouvement avec les mêmes conditions initiales que précédemment.

b) En déduire que le mouvement de la particule peut être décomposé en un mouvement autour d'un centre guide de même nature que précédemment, auquel se superpose un mouvement du centre guide que l'on précisera. Exprimer la vitesse de "dérive" transversale du centre guide notée $\vec{v}_{\perp G}$. Sur un schéma tracer $\vec{E}$, $\vec{B}$ et l'allure de la trajectoire pour une particule de charge $q > 0$. (On supposera $B > 0$, $E_x > 0$, $E_z > 0$).

---

[1] Sur un texte dégradé par le vieillissement de l'encre et du papier, mon scanner ne distingue pas les caractères gras et non gras ; pour cette édition, j'ai mis des flèches aux vecteurs.

[2] Lire .

c) A l'aide des résultats précédents, exprimer $\vec{v}_{\perp G}$ vectoriellement en fonction de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et B^2 .

QUESTION III.

Les résultats précédents peuvent être étendus à d'autres forces que la force électrostatique en remplaçant le terme $q\vec{E}$ dans les équations par l'expression de la force appliquée.

a) Quelle est alors la vitesse de dérive du centre guide en fonction de $\vec{F}, \vec{B}, q$.

b) Appliquer ceci à la force de pesanteur dans le champ uniforme $\vec{g}$.

c) Sur un schéma indiquant les directions de $\vec{B}$, de $\vec{g}$ (pour plus de clarté on pourra prendre $\vec{B} \perp \vec{g}$) signaler dans quel sens se déplace le centre guide d'une particule dans les cas $q > 0$, $q < 0$. Dans un plasma globalement neutre, composé d'ions (masse M , charge $+e$) et d'électrons (masse m , charge $-e$) de densité volumique $n_i = n_e = n$ particules par unité de volume, y a-t-il création d'une densité de courant ? Si oui, calculer son expression et reporter le résultat trouvé sur le schéma.

QUESTION IV.

On considère maintenant un champ magnétique légèrement inhomogène : les lignes de champ sont toujours parallèles à l'axe $\vec{u}_z$ mais le module de $\vec{B}$ dépend de y : $\vec{B} = B(y)\vec{u}_z$. La variation de B est suffisamment faible pour que l'on puisse traiter son influence sur le mouvement d'une particule comme une perturbation petite de celui-ci. On se placera dans les conditions où $\rho_L << \left(\frac{1}{B}\frac{dB}{dy}\right)^{-1}$ et on considèrera donc que la particule suit avec une bonne approximation le mouvement décrit dans la question I.

a) Donner les expressions des coordonnées de la force de Lorentz appliquée à une particule en mouvement en introduisant $B(G) = B(x_G, y_G, z_G)$.

b) Quelle est l'expression de la force moyenne appliquée sur la particule pendant une révolution autour du centre guide ?

c) Quelle est alors la vitesse de dérive du centre guide due au gradient du champ $\vec{B}$, montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme : $\vec{v}_{\perp G} = \pm\frac{1}{2} v_\perp \rho_L \frac{\vec{B} \wedge \vec{\nabla} B}{B^2}$ où $\vec{\nabla} B = \frac{\partial B}{\partial y}\vec{u}_y$

Dans la suite, on admettra que ces relations restent applicables même dans des situations géométriquement plus complexes.

QUESTION V.

On considère maintenant le cas d'un champ magnétique inhomogène $\vec{B}(r,z)$ ayant la symétrie de révolution autour d'un axe $\vec{u}_z$ (r désigne la distance à l'axe) ; on désigne par B_z et B_r les composantes $// \vec{u}_z$ et $\perp \vec{u}_z$.

a) Pouvez-vous citer un dispositif simple qui puisse créer un champ $\vec{B}$ ayant ces caractéristiques ?

b) Montrer qu'au voisinage de l'axe Oz , à une distance r de celui-ci telle que l'on ait $r\frac{\partial B_z}{\partial r} << B_z$, il existe une composante radiale B_r du champ $\vec{B}$ que l'on calculera en fonction de $\frac{\partial B_z}{\partial z}$.

c) Ici encore on considérera que les inhomogénéités du champ sont faibles, si bien qu'en première approximation les particules chargées décrivent toujours un mouvement de révolution autour du centre guide G . Soit une particule dont le centre guide a un mouvement le long de l'axe de révolution Oz , calculer la composante moyenne sur $\vec{u}_z$ de la force due à la composante radiale de $\vec{B}$ sur la particule durant une révolution autour du centre guide ; en déduire que le centre guide a un mouvement d'équation : $\frac{dv_{// G}}{dt} = -\frac{v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B_z}{\partial z}$

d) En écrivant la conservation de l'énergie cinétique de la particule dans le champ magnétique, montrer que la quantité $\mu = \frac{1}{2} m \frac{v_\perp^2}{B}$ reste constante au cours du mouvement.

e) En déduire qu'au cours du mouvement la trajectoire de la particule s'enroule toujours autour du même tube de champ.

QUESTION VI.

On considère maintenant un champ magnétique faiblement inhomogène dont les lignes de champ ont localement un rayon de courbure fini $R >> \rho_L$.

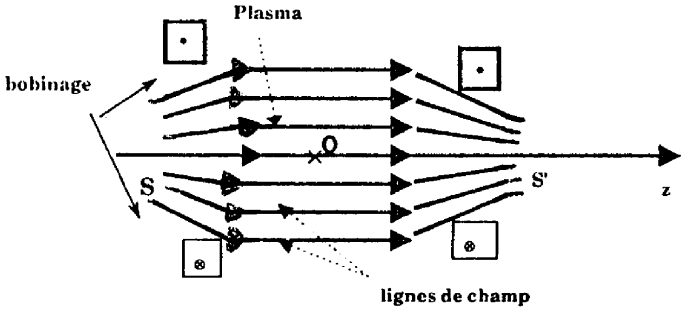
a) A partir du résultat précédent (question V-e) montrer que l'on peut considérer qu'une particule suivant un tube de champ de rayon de courbure R subit en moyenne une force de type centrifuge : $\vec{F} = -m\frac{v_{//}^2}{R}\vec{u}_n$ où $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire de la normale principale au tube de champ. En déduire la vitesse de dérive $\vec{v}'_{\perp G}$ due à cet "effet de courbure".

b) Par application du théorème d'Ampère (en l'absence de courant local), montrer que le gradient du module du champ $\vec{B}$ possède une composante sur $\vec{u}_n$ soit : $\left(\vec{\nabla}B\right)_n = \frac{B}{R}\vec{u}_n$ avec $B = \left\|\vec{B}\right\|$.

c) Exprimer la vitesse de dérive $\vec{v}''_{\perp G}$ due à cet "effet de gradient" et former l'expression de la vitesse de dérive totale $\vec{v}_{\perp G} = \vec{v}'_{\perp G} + \vec{v}''_{\perp G}$.

QUESTI0N VII.

On cherche à confiner un plasma dans un champ magnétique stationnaire de révolution autour d'un axe Oz et



d'intensité variable en fonction de z et de r (distance à l'axe de révolution) selon le dispositif suivant :

En O le champ B est minimum, $B = B_0$; en S et S' le champ est maximum et prend la valeur $B(S) = B(S') = B_m$. On néglige les collisions des particules chargées entre elles dans le plasma, si bien que le mouvement de chaque particule est décrit par les résultats de la question V.

a) Montrer qualitativement, à l'aide des résultats précédents, que dans le mouvement des particules le long des lignes de champ, il peut arriver un moment où la composante $v_{//}$ s'annule. Quelle est la suite du mouvement ?

b) Soit une particule en O dont la vitesse v_0 fait l'angle θ_0 avec l'axe Oz . Montrer que, si l'on note θ l'angle qu'elle fait ensuite avec la ligne de champ en un point où la valeur du champ est $\vec{B}$, on a la relation

$$\frac{\sin^2\theta}{B} = \frac{\sin^2\theta_0}{B_0}$$

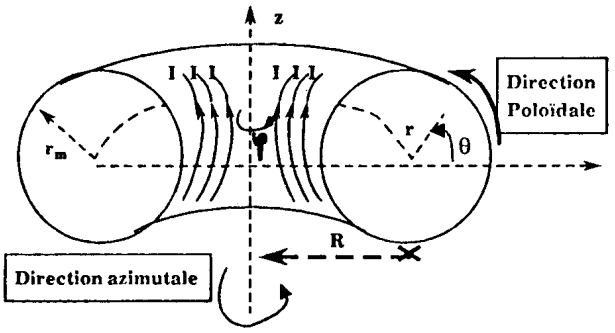
c) Quelle est la valeur θ_{0m} de θ_0 pour laquelle la particule est "réfléchie" au niveau de S ou S' ? Que se passe t-il pour des angles θ_0 inférieurs ou supérieurs à θ_{0m} **?**

d) Justifier les dénominations : effet de miroir magnétique, cône de perte.

e) Que se passe-t-il pour le plasma si l'on tient compte maintenant des collisions ? Si τ_c (durée moyenne entre deux collisions pour une particule) est de l'ordre de 10^4 s , quel est l'ordre de grandeur de la "durée de confinement" du plasma dans le système magnétique étudié ?

QUESTION VIII.

Afin de remédier à l'inconvénient de l'existence du cône de perte qui nuit à la qualité d'un confinement magnétique, on songe à refermer les lignes de champ sur elles-mêmes ; on aboutit ainsi à une configuration toroïdale :



a) On considère un solénoïde toroïdal. On note R le rayon moyen du tore et r_m le rayon d'un cercle méridien. Ce solénoïde comporte N spires enroulées uniformément et parcourues par un courant I.

En un point repéré par l'angle "azimutal" φ et par les coordonnées (r,θ) dans le plan méridien, calculer le champ $B_\varphi(r,\theta)$, l'exprimer en fonction de $B_0 = B_\varphi(0,0)$.

b) Montrer que la vitesse de dérive étudiée à la question VI. a pour effet de précipiter les particules situées à l'intérieur de la configuration contre les parois limitant le tore à $r = r_m$. Dans quelle direction ? (On distinguera le cas des ions et des électrons). Estimer numériquement l'ordre de grandeur de la durée de confinement d'un plasma d'ions et d'électrons ; on prendra $R = 1\,\mathrm{m}$, $r_m = 20\,\mathrm{cm}$, $B_0 = 5\,\mathrm{T}$, ainsi que les relations: $v_{//}^2 = v_\perp^2/2$ et $mv_\perp^2/2 = 10\,\mathrm{keV}$ (relations valables pour les ions et les électrons).

QUESTION IX.

Afin d'annuler cette dérive des particules, on rajoute au champ précédent $\vec{B}$ une composante $B_\theta(r)$ appelée champ poloïdal, créée par une densité de courant $j_\varphi(r)$ circulant dans la direction azimutale à l'intérieur du plasma lui-même.

(Ce courant est induit de l'extérieur en utilisant le plasma comme le secondaire d'un transformateur). On obtient ainsi la configuration magnétique "Tokamak".

a) Calculer B_θ en fonction de r et de la quantité : $I(r) = \int_0^r 2\pi\rho j_\varphi(\rho)d\rho$.

b) Montrer qu'une ligne du champ $\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_\theta$ s'enroule autour d'un tore de rayon moyen R et de rayon de cercle méridien r. On appelle surfaces magnétiques ces tores emboîtés les uns dans les autres et sur lesquels s'enroulent les lignes de champ. En se limitant au cas $r << R$, établir que, sur une surface magnétique, l'équation d'une ligne de champ obéit à une équation de la forme : $\frac{d}{d\theta} = q(r)$ [3]. En utilisant B_0, $I(r)$ et la variable r/R, déterminer la fonction $q(r)$ de façon approchée en négligeant les termes d'ordre 2 en r/R. Quelle est la signification géométrique du facteur $q(r)$?

Application numérique : on réalise expérimentalement $q(0) = 1$; en déduire $j_\varphi(0)$, en reprenant les valeurs données dans la question VIII.

c) Décrire le mouvement d'une particule chargée dans cette configuration magnétique et mettre en évidence que l'effet de dérive observé précédemment est ici compensé exactement entre les portions de trajectoire du centre guide, situées de part et d'autre du plan équatorial du tore. Ceci est valable pour les particules qu'on appelle "circulantes", qui suivent dans leur mouvement une ligne de champ.

d) Etablir que 1e long d'une ligne de champ le module du champ magnétique oscille entre deux valeurs extrêmes (on se contentera d'un développement limité à l'ordre 1 en r/R). En déduire l'existence d'une autre classe de particules appelées particules "piégées".

e) Quel est l'effet de dérive pour ce type de particules ?

f) Conclure quant à la qualité de la configuration Tokamak utilisée pour confiner des particules chargées en mouvement. (On notera que l'étude simplifiée menée jusqu'ici concernait les mouvements individuels et sans collisions des particules mais qu'en réalité il faut tenir compte de mouvements collectifs dépendant des collisions, de phénomènes de pression, d'instabilités électromagnétiques qui apportent des limites et des correctifs à cette première étude)

[3] Lire

**** FIN ****