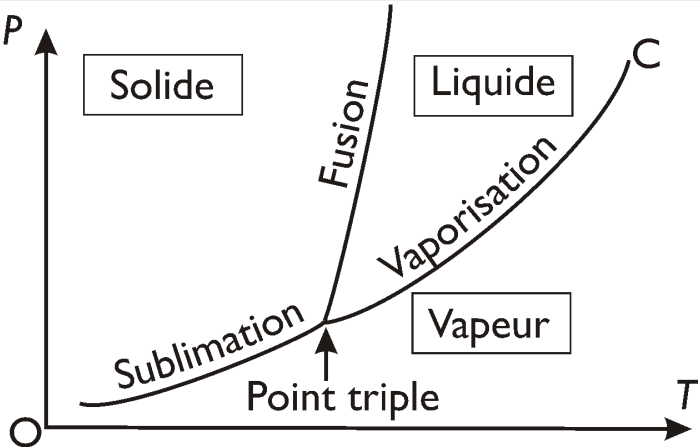
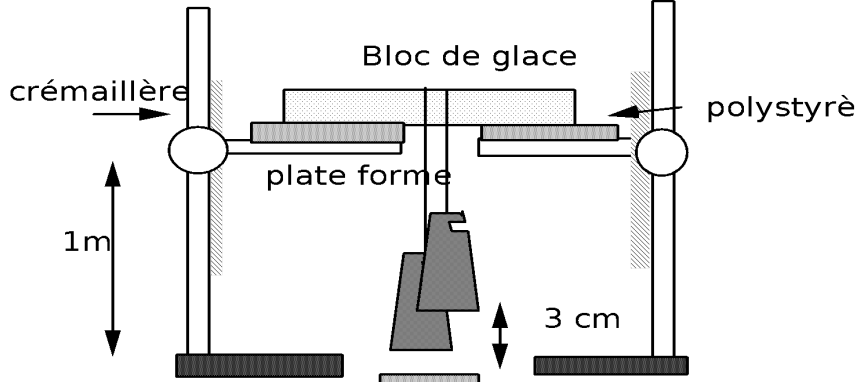
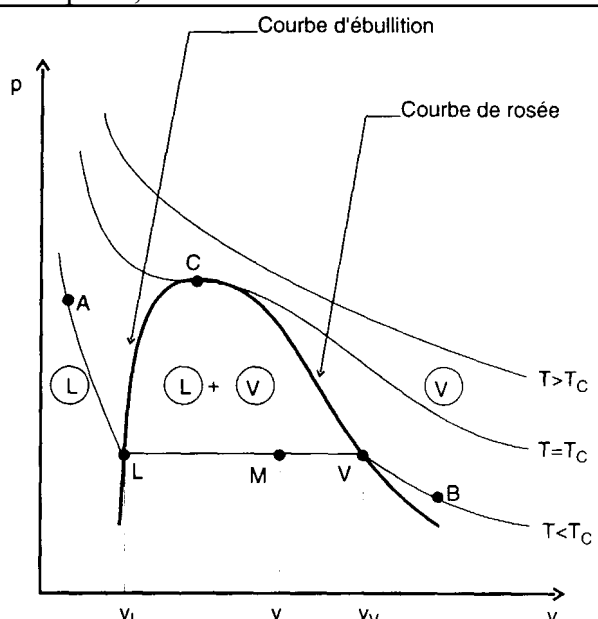


Correction INA 2004

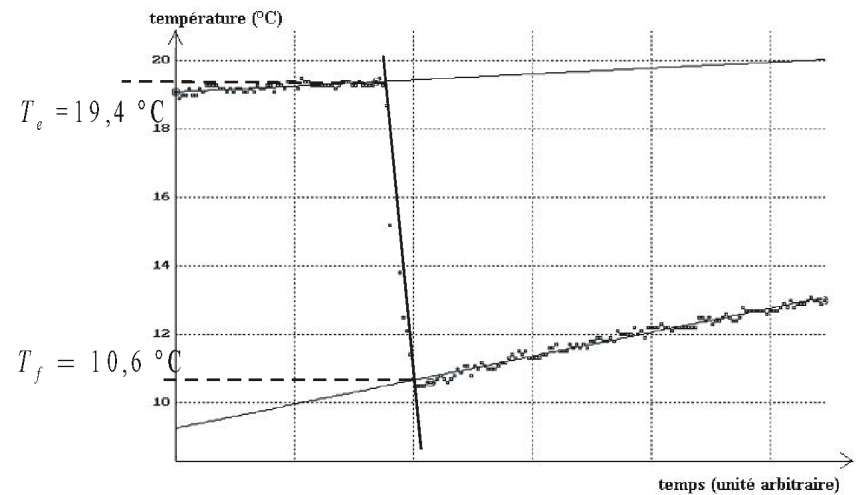
Probleme 1 : Etude de l'eau en physique :

A Préliminaire :

A-1	 Les différents domaines sont (1) : solide (2) : gaz (3) : liquide	
A-2	Le point C est le point critique. La pression critique est la pression au-dessus de laquelle il n'est pas possible d'observer la vaporisation par élévation isobare de la température. La température critique est la température au-dessus de laquelle il n'est pas possible d'observer la vaporisation par détente isotherme. Au delà, le fluide est hypercritique. Le point T intersection des 3 courbes est appelé le point triple, les 3 phases solide, liquide et vapeur coexistent ; La pression P_T et la température T_T ont des valeurs déterminées qui ne dépendent que du corps pur.	
A-3	Les courbes du diagramme (T,P) montrent que, pour qu'il y ait coexistence entre deux phases, on est nécessairement sur une des courbes du diagramme, donc qu'il y a un lien entre P_{eq} et T. Nous pouvons retrouver ce résultat avec la variance : Ici $v=1$. A température fixée, la pression l'est aussi, $P=P(T)$. L'enthalpie libre molaire, 5cas particulier du potentiel chimique) est la même dans les deux phases en équilibre : $g_a = g_b$ donc, dans une transformation entre deux états d'équilibre infiniment voisins : $dg_a = dg_b$ or ? dans la phase a : $dg_a = v_a dP_{eq} - s_a dT$ où v_a et s_a sont respectivement le volume et l'entropie molaire dans la phase a et P_{eq} la pression lorsqu'il y a équilibre entre les phases a et b et T la température de même : $dg_b = v_b dP_{eq} - s_b dT$ donc : $v_a dP_{eq} - s_a dT = v_b dP_{eq} - s_b dT$ on en déduit : $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{s_b - s_a}{v_b - v_a}$; or : $s_b - s_a = \frac{L_{a \rightarrow b}}{T}$ donc : $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{L_{a \rightarrow b}}{T(v_b - v_a)}$ (relation de Clapeyron)	
A-4	La pente est négative alors comme la chaleur latente est positive, $v_{liquide} < v_{solide}$ Pour illustrer ce fait, nous disposons de différentes expériences, 	

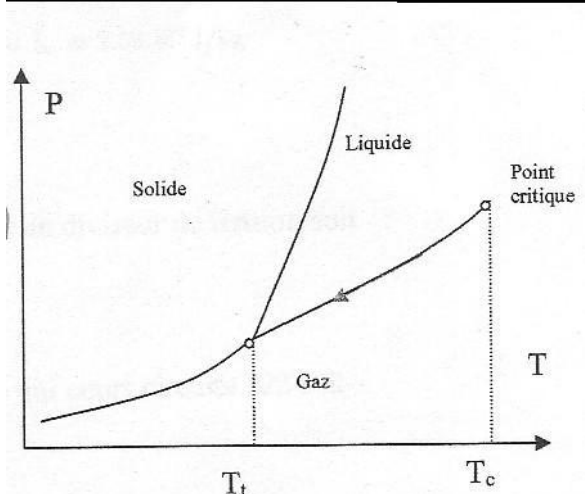
	- le fil à couper la glace : Pour un bloc de quelques centimètres d'épaisseur, la traversée dure environ une demi-heure dans les conditions décrites. - Les glaçons flottent sur l'eau liquide . - L'hiver, il faut purger les conduites pour éviter leur éclatement. Une bouteille en verre dans un congélateur explose, etc...		
A-5			

B. Mesure de la chaleur latente de fusion :

B-1	On crée un mélange eau-glace pour mettre les glaçons en température à 0°C car ils sont à une température plus faible dans un congélateur. On les essuie pour enlever au mieux la phase liquide		
B.2	La diminution des masses marquées correspond à l'ajout de l'eau puis de l'eau et de la glace $m_e = 140,3 - 48,8 = 91,5 \text{ g}$ et $m_e + m_g = 140,3 - 39,9 = 100,4 \text{ g}$ donc : $m_g = 100,4 - 91,5 = 8,9 \text{ g}$		
B-3	La mesure s'effectue aux intersections des portions de droite $T_e = 19,4^\circ\text{C}$ et $T_f = 10,6^\circ\text{C}$ 		
B-4	La transformation s'effectue à pression constante donc $Q = \Delta H$. La transformation est isobare et quasi adiabatique, donc isenthalpique $\Delta H_{\text{adiabatique}} = 0 = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{glace}} =$ $\Delta H_{\text{fonction}} = m_e C_{\text{eau}} (T_f - T_e) + m_g (L + C_{\text{eau}} (T_f - T_g)) = 0$		

	$L = \frac{1}{m_g} \left(m_e C_{eau} (T_e - T_f) - m_g C_{eau} (T_f - T_g) \right)$ Nous en déduisons donne $L = 339 \text{ kJ.kg}^{-1}$		
B-5	D'après le second principe, $\Delta S_{eau-glac\acute{e}} = \Delta S_{eau} + \Delta S_{glac\acute{e}} = m_e C_{eau} \ln \frac{T_f}{T_e} + m_g \left(\frac{L}{T_g} + C_{eau} \ln \frac{T_f}{T_g} \right)$ Numériquement, $\Delta S = S^c = 0,45 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ce qui traduit l'irréversibilité de la transformation.		
B-6	Il suffit d'intégrer la relation de Clapeyron $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{L}{T(v_l - v_g)}$ sans oublier les constantes $P_{eq}(T) - P_{eq}(T_g) = \frac{L_{fusion}}{v_{liquide} \left(1 - \frac{1}{d}\right)} \ln \frac{T}{T_g}$ d'intégration Numériquement : $P_{eq}(T = -1^\circ\text{C}) = 111 \text{ bar}$.		

Mesure de la chaleur latente de vaporisation :

C-1	La transformation est un refroidissement isochore le long de la courbe de changement d'état.		
C-2			
C-3	Il suffit d'intégrer la relation de Clapeyron en négligeant le volume de liquide devant celui du gaz et en faisant l'approximation que le gaz est un gaz parfait $\frac{dP_{eq}}{dT} = \frac{L_{vap}}{T(v_{gaz} - v_{liquide})} \approx \frac{L_{vap}}{T v_{gaz}} \approx \frac{L_{vap}}{T \left(\frac{RT}{MP_{eq}} \right)} = \frac{L_{vap} MP_{eq}}{RT^2}$ On ne peut pas toujours négliger le volume massique du liquide devant celui du gaz car le volume massique du liquide rejoint celui du gaz lorsqu'on s'approche du point critique.		
C-4	Par intégration de la question précédente, $\ln P_{eq} = A - \frac{L_{vap} M}{RT}$, on obtient : $\frac{L_{vap} M}{R} = 5068$ d'où, d'après les résultats expérimentaux : $\ln P_{eq} = 13,5 - \frac{5068}{T}$		

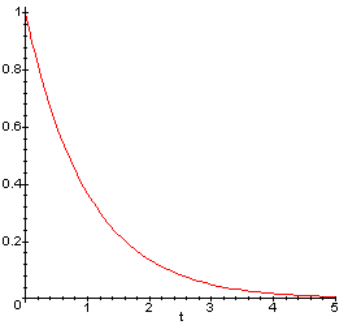
	d'où enfin : $L_{\text{van}} = 2,341.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$		
C-5	La pression mesurée et la somme de la pression de l'eau et de air résiduelle dans le tuyau du capteur. Celui-ci n'est plus négligeable lorsque la température baisse.		
C-6	Au point triple, la température de l'équilibre de vaporisation doit être égale à la température de l'équilibre de fusion ; on a donc, en admettant la validité du modèle pour $\ln(P_{eq}) = 13,5 - \frac{5068}{T} \quad \text{avec}$ la courbe de vaporisation : $P_{eq}(T)(\text{bar}) = -30060 \ln \frac{T}{T_g} + 168622$ L'application numérique donne $T' = 273,01 \text{ K}$ et $P_T = 0,068 \text{ bar}$ Remarque : On constate qu'on n'est pas dans l'intervalle $[70^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]$ pour la température : le modèle utilisé pour l'équation de la courbe de vaporisation n'est donc qu'approché, ce qui fait qu'on ne trouve qu'un ordre de grandeur pour les grandeurs du point triple.		
C-7	Il suffit de faire l'application numérique $T = \frac{5068}{13,5 - \ln(P_{eq})} \quad \text{avec}$ $T_{eq} = 385 \text{ K} = 112^\circ\text{C}$ La cocotte-minute permet d'obtenir une cuisson en milieu aqueux à plus haute température, d'où un gain de temps pour la cuisson.		
C-8	En faisant le tour du point triple, $\Delta H = 0$ et $L_{\text{van}} + L_{\text{fusion}} = L_{\text{sublimation}} = 2,59.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$		

PROBLÈME 2 : Électricité :

A RL

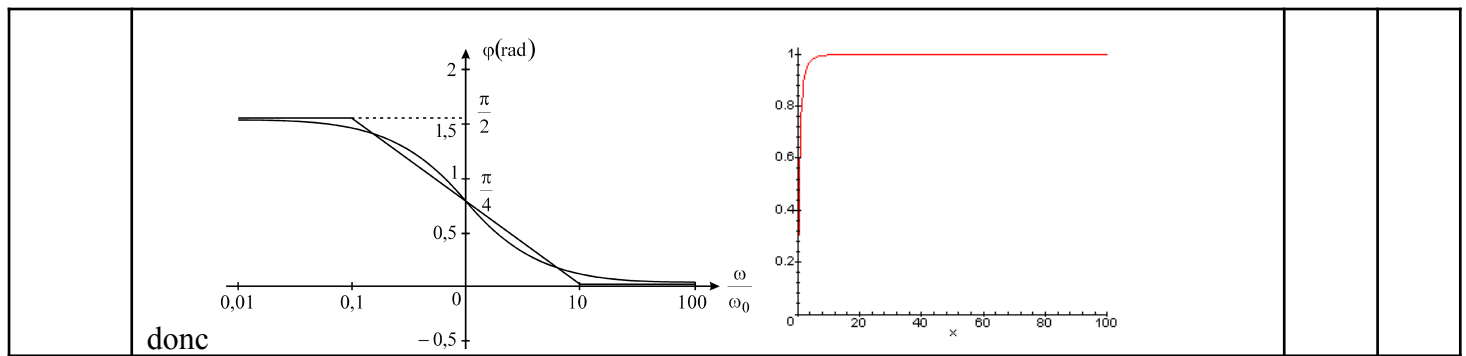
A-1 Étude d'un circuit RL-Étude en régime transitoire

A-1-1	Nous ne pouvons pas affirmer à <u>priori</u> la continuité de la tension aux bornes de la bobine à $t = 0$. Mais le courant dans la bobine est continu, donc nul à $t = 0$; on a donc un courant (de même valeur) non nul dans R et dans R/2 à $t = 0^+$; il y a donc discontinuité du courant dans R à $t = 0$. Plus précisément, nous avons un diviseur de $s(t = 0^+) = \frac{R/2}{R + R/2} E = \frac{E}{3} \quad \text{et} \quad i(t = 0^+) = \frac{3}{2} \frac{E}{R}$ tension :		
A-1-2	En régime permanent, la bobine devient équivalente à un fil donc $s(t)$ tend vers 0		
A-1-3	En utilisant les équivalences Thevenin- Norton, nous obtenons un simple circuit RL avec $E_{th} = \frac{E}{3}$ et $R_{th} = \frac{R}{3}$. L'équation différentielle est $\frac{R}{3} i_L + L \frac{di_L}{dt} = \frac{E}{3}$ et $s = L \frac{di_L}{dt}$. En dérivant la relation, $\frac{R}{3} \frac{di_L}{dt} + L \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{3} \right) = 0$ ou $\frac{R}{3} s + L \frac{ds}{dt} = 0$ encore $\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L} s = 0$; $\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = 0$ avec $\tau = \frac{3L}{R}$.		
A-1-4	La solution est de la forme $s(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. A $t=0$, $s(t = 0^+) = \frac{E}{3} = A$ alors $s(t) = \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$		

A-1-5		A-1-6	$s(t_0) = \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = \frac{E}{3} \frac{1}{10} \text{ alors on en } \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = 0,1$ déduit : ; d'où $t_0 = \tau \cdot \ln(10)$		
A-1-7	Il suffit, pour visualiser $s(t)$, de brancher l'oscilloscope entre l'extrémité inférieure droite du circuit (où on met la masse de l'oscilloscope, reliée à la masse du générateur) et l'extrémité supérieure droite du circuit ; on règle l'affichage sur l'écran de telle sorte que le signal passe de $s(t=0^+)$ à 0 sur la graduation 0-100% de l'oscilloscope, puis on lit sur l'axe horizontal (échelle de temps) le temps au bout duquel nous coupons l'axe des 10% . On a $s(t_0) = s(t=0^+)/10$ et $t_0 = \tau \cdot \ln(10)$. C'est la méthode des 10% 90%.				
A-1-8	$L = \frac{R\tau}{3} = 0,43 \text{ mH}$ Numériquement,				
A-1-9	Il faut que l'on ait : $\tau \ll T$, c'est-à-dire : $f > 10/\tau = 100\text{kHz}$				

A-2 Étude en régime sinusoïdal

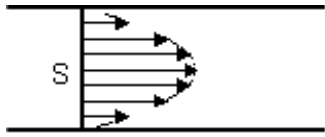
A-2-1	- En hautes fréquences, la bobine est équivalente à un coupe-circuit ; si v_e est la tension d'entrée et v_s la tension de sortie , nous obtenons un diviseur de tension $v_s = \frac{R/2}{R + R/2} v_e = \frac{v_e}{3}$ - En basses fréquences, la bobine est équivalente à un court-circuit donc $v_s = 0$. Le filtre est un filtre passe-haut				
A-2-2	En notation complexe : $\underline{s} = \frac{\underline{z}_{eq}}{\underline{z}_{eq} + R} \underline{e} \quad \text{où} \quad \underline{z}_{eq} = \frac{jL\omega \cdot R/2}{jL\omega + R/2} = \frac{jLR\omega}{2jL\omega + R}$ Donc : $\underline{s} = \frac{jLR\omega}{jLR\omega + R(2jL\omega + R)} \underline{e} = \frac{jL\omega}{3jL\omega + R} \underline{e} \quad \text{alors}$ $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{3jL\omega}} \quad \text{soit} \quad H_0 = 1/3 ; \quad f_0 = \frac{R}{6\pi L}$				
A-2-3	la fréquence de coupure à -3db est définie par : $H = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$. Donc : ce qui donne immédiatement : $f_c = f_0$ $\frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^2}}$				
A-2-4	$ H = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}} \quad \arg(H) = -\text{Arctan}\left(\frac{f_0}{f}\right)$				



B-Étude d'un circuit plus complexe :

B-1	A $t=0$, la bobine horizontale se comporte comme un court-circuit et celle verticale comme un interrupteur ouvert. Comme à $t=0^-$: $i_4(t=0^-) = 0$, $i_2(t=0^-) = 0$, $i(t=0^-) = i_1(t=0^-) = i_3(t=0^-) = E/(2R)$. $i(t=0^+) = E/(2R)$ puis : $i_2(t=0^+) = i(t=0^+) - E/(2R) = E/(2R) - E/(2R) = 0$. $i_3(t=0^+) = i(t=0^+) - i_4(t=0^+) = E/(2R) - 0 = E/(2R)$		
B-2	Au bout d'un temps infini, les deux bobines sont équivalentes à des courts-circuits ; donc : $s = 0$ $i = E/R$ $i_3 = 0$ $i_2 = 0$ $i_4 = i = E/R$ $i_1 = i - i_2 = E/R$		
B-3	L'équation caractéristique de l'équation différentielle décrivant le circuit est : $3r^2 + \frac{4}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$ Le discriminant est : $\Delta = \frac{16}{\tau^2} - \frac{12}{\tau^2} = \frac{4}{\tau^2} > 0$ Les racines sont $r_1 = -\frac{1}{3\tau} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{\tau}$ La solution est de la forme $s(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ allure de $s(t)$: $s(t=0^+) = E/2$ pour étudier $ds/dt(t=0^+) = 0$, il suffit d'intégrer l'équation différentielle entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$: $3\left(\frac{ds}{dt}(t=0^+) - \frac{ds}{dt}(t=0^-)\right) + \frac{4}{\tau}(s(t=0^+) - s(t=0^-)) = 0$	donc : $3\left(\frac{ds}{dt}(t=0^+) - 0\right) + \frac{4}{\tau}(0) + \frac{1}{\tau^2} \cdot 0 = 0$ d'où : $\frac{ds}{dt}(t=0^+) = 0$ Nous avons donc l'allure suivante :	
B-4-a	- En hautes fréquences, les bobines étant équivalentes à des coupe-circuits, on a : $s = (1/3)E$ - En basses fréquences, les bobines étant équivalentes à des courts-circuits, on a : $s = 0$. il s'agit d'un filtre passe-haut		
B-4-b	En appelant z_{eq} l'impédance équivalente à L en parallèle avec $R/2$, on a immédiatement $\underline{\underline{s}} = \frac{\underline{\underline{z_{eq}}}}{2\underline{\underline{z_{eq}}} + R}, \quad \text{avec : } \underline{\underline{z_{eq}}} = \frac{jL\omega R}{jL\omega + R}$ (diviseur de tension) : $\underline{\underline{H}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{\underline{\underline{e}}} = \frac{jL\omega R(R + jL\omega)}{(R + jL\omega)(3jLR\omega + R^2)}$ après calculs, on obtient : $\underline{\underline{H}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{\underline{\underline{e}}} = \frac{jL\omega}{3jL\omega + R}$ en simplifiant par : $(R + jL\omega)$, on obtient : On constate que l'équation différentielle qu'on peut déduire de la première forme de la fonction de transfert diffère de celle fournie à la question B-3 : ceci est lié à la simplification par le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert, simplification légitime en régime sinusoïdal permanent mais pas lorsque le signal d'entrée est un échelon ou, plus généralement, en régime quelconque		

PROBLÈME 3 : Viscosimètre :

1-	Bilan : les forces pressantes : $P_1 \pi r^2 \vec{u}_z$ et $-P_2 \pi r^2 \vec{u}_z$; Le poids : $\mu g \pi r^2 \vec{u}_z$ la force de viscosité : $+ 2\pi r L \eta \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_z$.		
2-	En régime permanent, la somme de toutes les forces précédentes est nulle : $P_1 \pi r^2 \vec{u}_z - P_2 \pi r^2 \vec{u}_z + \mu g \pi r^2 \vec{u}_z + 2\pi r L \eta \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_z = 0$. On en déduit, puisque v ne dépend que de r et donc que $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{dv}{dr}$: $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{2L\eta} r$ soit, en posant : $k = -\frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{2L\eta}$ On vérifie l'homogénéité de la relation $[k] = \frac{[P]}{[L][P.T]} = \frac{1}{[L.T]}$		
3-	L'équation précédente s'intègre immédiatement en : $v(r) = \frac{1}{2} k r^2 + \alpha$. La constante d'intégration α s'obtient à partir de la condition aux limites : $v(R) = 0$; donc : $\alpha = -\frac{1}{2} k R^2$ et, finalement : $v(r) = \frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{4L\eta} (-r^2 + R^2)$.		
4-			
5-	La débit à travers une couronne de rayon r et d'épaisseur dr est $dQ = v(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} k (r^2 - R^2) 2\pi r dr$		
6-	$Q = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{2} k (r^2 - R^2) 2\pi r dr = -\pi k \frac{R^4}{4}$ donc : $Q = \frac{P_1 - P_2 + \mu g L}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta}$ $Q = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta}$ Si la pesanteur est négligeable, . Nous retrouvons la loi de Poiseuille.		
7-	Les points 1 et 2 sont en contact avec l'extérieur donc ils sont à la pression P_0 . En appliquant l'équation de la statique des fluides $P_1 - P_3 = P_1 - P_0 = \mu g h$		
8-	Le débit vaut $Q = -\pi R^2 \frac{dh}{dt}$ car $\frac{dh}{dt} < 0$		
9-	Le débit s'écrit donc $Q = \frac{\mu g h + \mu g L}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta} = -\pi R^2 \frac{dh}{dt}$ qui se réécrit $\frac{dh}{dt} + \frac{\mu g}{L} \frac{R^4}{R^2} \frac{1}{8\eta} (h + L) = 0$. Avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\mu g}{L} \frac{R^4}{R^2} \frac{1}{8\eta}$, on obtient $\frac{dh}{dt} + \frac{1}{\tau} (h + L) = 0$ $h(t) = (h_0 + L) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - L$ En intégrant et en tenant compte des conditions initiales,		

10	Si t_1 est l'instant au bout duquel le niveau a baissé de $\Delta h = 5\text{cm}$ ($t_1 = 7$ minutes) : $h_0 - \Delta h = (h_0 + L)\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) - L$. Nous en déduisons $\tau = 1,46.10^3 \text{ s}$ Comme $\frac{1}{\tau} = \frac{\mu g}{L} \frac{R^4}{R'^2} \frac{1}{8\eta}$ alors $\nu = \frac{\eta}{\mu} \approx 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}$		
----	--	--	--