

Processus de la pensée mathématique

Explication. Preuve. Démonstration. Raisonnement.

Les verbes expliquer, prouver, démontrer, sont souvent considérés comme synonymes dans la pratique de l'enseignement des mathématiques.

Il convient de préciser au mieux ce vocabulaire.

Explication. Elle pourrait être ce discours qui vise à rendre intelligible à autrui la vérité de la proposition déjà acquise pour le locuteur. Tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à d'autre le caractère de vérité d'un énoncé mathématique. Expliquer renvoie aux significations, c'est-à-dire à la compréhension de la validité d'un énoncé, non au sens de la logique, mais au sens de ses relations avec le corps des connaissances mathématiques.

Preuve. Explication reconnue et acceptée par une communauté à un moment donné. Une preuve est généralement exprimée en langage courant servant à lever le doute. Le passage de l'explication à la preuve est un processus social. Ce nouveau statut d'une explication peut ne pas être définitif, il peut évoluer avec l'évolution des savoirs sur lesquels il s'appuie. Une preuve peut être acceptée par une communauté et refusée par une autre.

Dans le développement d'une argumentation, le seul moyen d'établir la vérité est de fournir une preuve. Dès l'établissement de la preuve d'une déclaration, celle-ci devrait être acceptée par tous ! Convaincre consisterait à construire et présenter des preuves !

Ce serait l'idéal !

Une telle situation serait envisageable si les intervenants possédaient un langage univoque et dont le sens est compris et accepté par tous. En plus de cela, il faut des règles qui permettent de construire un énoncé à partir d'autres antérieurs, une sorte de logique commune. Dans l'univers des mathématiques, ces conditions sont remplies ! Elles le sont dans l'univers de cette science formelle dont les objets sont abstraits et n'ont pas spécialement de contenu matériel.

En mathématiques, la recherche d'une preuve est une activité basée sur l'intuition. Une fois trouvée, la preuve mathématique est rigoureusement indiscutable.

Et qu'est-ce qu'alors une preuve dans l'univers des mathématiques ?

Preuve comme construction : L'exemple de Georg Cantor pourrait éclaircir cette idée de « la preuve comme construction ».

Au milieu du XIX^{ème} siècle, le mathématicien allemand Cantor entreprit de clarifier la notion d'infini. Cantor s'est posé la question suivante : « Y a-t-il plus de points sur un segment de longueur 1 ou dans un carré de côté 1 ? »

Au terme de sa recherche, Cantor s'est retrouvé avec une réponse dérangeante «il y a exactement autant de points sur la droite que dans le carré ! »

Cette réponse est dérangeante à plus d'un niveau ! D'une part, elle contredit notre intuition sur les notions de « autant » et de « contenu dans » : Le segment étant « contenu dans le carré », on peut concevoir qu'il y a au moins autant de points dans le carré que sur le segment. D'autre part, elle déstabilise notre conception du « point » et le rapport de celui-ci avec « droite » et «carré ».

Aux yeux de Cantor, c'est une réponse que la croyance rejette mais que la raison est bien obligée d'admettre, parce qu'une preuve irréfutable en a été faite ; plus aucun doute n'est possible ! A ce propos, Cantor avait écrit à Dedekind : « je le vois, mais je ne le crois pas ! »

Cet exemple montre l'importance et le pouvoir que le concept de « preuve » ou de « démonstration » possède dans le domaine des mathématiques. Une simple preuve peut surmonter toutes les croyances contraires.

Dans l'exemple traité ci-dessus, la preuve est une construction d'un objet dont on affirme l'existence. C'est l'une des formes les plus élémentaires et irréfutable d'une preuve

La réduction à l'absurde : Une des questions importantes qui s'est posée aux mathématiciens grecs est celle de la « commensurabilité » de certains nombres, (càd est-il possible décrire un nombre particulier comme quotient de deux nombres entiers ?). Par exemple, dans le cas de la diagonale d'un carré dont la longueur du côté est 1, la question revient à se demander si $\sqrt{2}$ est rationnel. Une réponse positive signifie qu'il existe une unité de longueur dont le côté du carré et sa diagonale sont des multiples !

Cette démonstration est un exemple du principe de réduction à l'absurde.

Ce principe consiste donc à supposer que l'énoncé à démontrer est vrai ; puis à argumenter jusqu'à obtenir une contradiction. Cela permet alors d'affirmer que l'énoncé est faux.

Cette forme de démonstration est très répandue dans le monde des sciences, Et plus particulièrement dans le domaine des mathématiques.

Induction complète : Dans un alignement de dominos, sous quelles conditions peut-on faire tomber tous les dominos ?

Pour faire tomber la chaîne, quelle qu'elle soit, il faut deux conditions :

1. Faire tomber le premier domino de la chaîne.
2. La chaîne ne doit pas être brisée. Chaque domino en tombant doit pouvoir faire tomber le domino suivant.

La preuve par induction, fonctionne sur un principe similaire. En terme mathématiques, Dans le cas où il est question d'une infinité de propositions, numérotées par des nombres naturels, $P_0, P_1, P_2, \dots$, dont il s'agit de montrer la vérité, le principe peut s'énoncer comme suit :

Si la proposition P_0 est vraie, et que la vérité de la proposition P_n entraîne nécessairement la vérité de la proposition P_{n+1} pour n'importe quel n , alors toutes les propositions sont vraies. : Une récurrence !

Exo : Est-il possible de payer n'importe quelle somme, supérieure à 3 dirhams, à l'aide de pièces de 2 dh et de 5 dh ?

La preuve formelle : La recherche de la plus grande généralité est une préoccupation permanente dans l'activité des mathématiciens. Dès qu'une démonstration est faite, on la soumet à de nombreuses tentatives de généralisation. Le processus de généralisation exige une définition plus rigoureuse de la nature et des propriétés d'une démonstration. La logique formelle donnera de la démonstration un équivalent formalisé : la preuve formelle.

Ces quelques principes _ce ne sont pas les seuls_ permettent de donner à une série d'énoncés le statut de « démonstration » aux yeux des mathématiciens. !

En somme : La démonstration est le type de preuve dominant en mathématiques. Elle a une forme particulière. Elle respecte certaines règles : au départ, des énoncés sont considérés comme vrais (axiomes), les autres sont déduits de ceux-ci ou d'énoncés précédemment démontrés. Les démonstrations sont caractérisées aussi par leur forme strictement codifiée. En fait, dans la pratique, cette rigueur formelle doit être nuancée (Par exemple, certaines étapes de la démonstration peuvent ne pas être explicitées mais laissées aux bons soins du lecteur).

Le raisonnement & processus de validation. Ici, le mot raisonnement désignera l'activité intellectuelle, pas toujours explicite, de manipulation d'informations, en vue de produire de nouvelles informations. Lorsque le but de cette activité est de s'assurer de la validité d'un énoncé et éventuellement de produire une explication (respectivement une preuve ou une démonstration, le raisonnement devient un processus de validation.

Réf.

- « Conjecturer, prouver » J. Lubczanski
- « Preuves et vérités dans les sciences formelles » Henri Volken
- « Logique mathématique : introduction. » Paul Rozière. 2004.
- « Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants » Michèle Gandit IUFM de Grenoble
- Documents de cours. Filière SMA-S5. Omar Rouan
- « relation entre l'exploration et la démonstration dans l'activité géométrique » M. Ourahay
- « Initiation au raisonnement déductif au collège » G. Arsac & co.
- « Vous avez dit conjecture ? » A. Ross.