Тема. Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок

Мета: пригадати означення ортоцентра і центроїда; дати означення прямі Ейлера та познайомити з визначними точками; формувати навики розв'язування задач, навики роботи з додатковою літературою; розвивати логічне мислення, просторову уяву; виховувати охайність у ведені записів.

Тип уроку: засвоєння нових знань, умінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

II. Перевірка домашнього завдання

З метою економії часу перевіряються лише відповіді та коротко обговорюється план розв'язування задач домашнього завдання по готовому рисунку.

III. Формулювання мети і завдань уроку

З кожним трикутником пов'язано багато особливих ліній і точок, а саме: висоти, медіани, бісектриси, ортоцентр, центроїд, прямі Чеви, пряма Менелая.

Розглянемо не менш цікаві точки і лінії в трикутнику, а саме: точки Ейлера, коло Ейлера, пряма Ейлера.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

З метою успішного засвоєння учнями змісту нового матеріалу уроку необхідно активізувати їх знання про:

1. Як знайти центр описаного кола? (точка перетину серединних перпендикулярів – O)

2. Як знайти центр вписаного кола, інцентр? (точка перетину бісектрис – J)

3. Яку точку називають ортоцентром трикутника? (точку перетину прямих які містять висоти трикутника – H)

4. Як називають точку перетину медіан трикутника? (центроїд – M)

Точки O, J, H, M називають чудовими точками трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманний цілий ряд красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є в будь-якому трикутнику?

V. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Історична довідка

Леонард Ейлер (1707–1783) був не лише одним з найславетніших математиків в історії людства, а й на диво різнобічно обдарованим ученим.

Жив Ейлер у м. Базель, Німеччина. Після закінчення університету в 1727 році він був запрошений в Росію працювати в Петербурзькій Академії, де читав лекції з фізики і математики. Ейлер створює фундаментальні праці з усіх галузей математики. У 1739 році опублікував тракт з музики, в якому виклав теоретичні основи будови музичних інструментів.

У 1741 році Леонард Ейлер повертається на батьківщину і працює в Берліні, на посаді директора математичного відділу берлінської Академії наук. Він пише багато ґрунтовних праць з астрономії, морської науки та інші.

У 1766 році, на прохання Катерини II, Ейлер із сім’єю повертається в Росію.

Невдовзі після приїзду до Петербурга Леонард остаточно осліп (ще у 1735 році внаслідок надзвичайно напруженої праці Ейлер захворів на нервову гарячку і під час хвороби втратив праве око) і міг тільки диктувати свої твори, виконуючи основні обчислення усно. Та працездатність ученого, якому близько 60 років, не тільки не зменшилась, а ще більше зросла.

У 1769 – 1771 роках учений видав три томи під спільною назвою «Діоптрика», в якій виклав загальну теорію діоптрики – науки, якої до нього взагалі не існувало.

У книзі «Листи до німецької принцеси» Ейлер популярно виклав багато питань з фізики, астрономії, хімії, математики і філософії. Твір видавався близько 40 разів дев’ятьма європейськими мовами.

До останніх днів Ейлер не залишав наукової роботи.

У геометрії багато понять названо ім’ям Леонарда Ейлера.

План вивчення нового матеріалу

1. Теорема. Пряма Ейлера.
2. Лема.
3. Точки Ейлера.
4. Теорема Ейлера. Коло дев’яти точок або коло Ейлера.

Теорема. ***У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.***

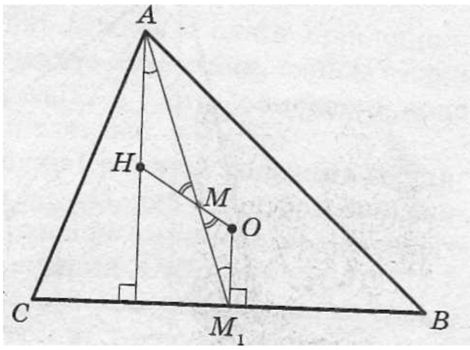
Цю пряму називають **прямою Ейлера.**

Доведення.

Доведення для рівнобедреного трикутника є очевидним.

В прямокутному трикутнику ортоцентр – середина гіпотенузи, тоді всі три точки належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.



Оскільки точка M_1 – середина BC, то AM_1 – медіана ΔABC. Нехай $AM_1 \cap HO$ в точці M.

Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$ як внутрішні різносторонні. Крім того, $\angle AMH = \angle M_1MO$ як вертикальні. Отже, $\Delta HAM \sim \Delta OM_1M$ за двома кутами. Звідси $AM : MM_1 = AH : OM_1 = HM : MO = 2$. Отже, точка M ділить медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A і $2OM = MH$. Звідси точка M – центроїд ΔABC.

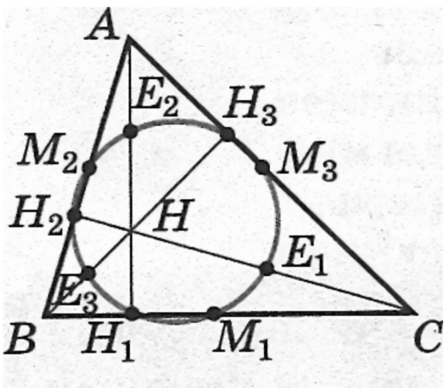
Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне.

Лема. ***Три чудові точки трикутника, центр описаного кола, центроїд і ортоцентр, лежать на одній прямі, причому 2OM = MH.***

Означення. ***Середини відрізків висот від ортоцентра до вершин трикутника називаються точками Ейлера (E).***

Теорема Ейлера. ***Основи медіан, основи висот і точки Ейлера лежать на одному колі, яке називається колом дев'яти точок або колом Ейлера.***

Доведення.



Нехай M_1, M_2, M_3 – середини сторін ΔABC; AH_1, BH_2, CH_3 – його висоти; H – ортоцентр, E_1, E_2, Ез – точки Ейлера.

Опишемо навколо $\Delta M_1M_2M_3$ коло. Доведемо, що H_1 (основа висоти AH_1) і точка Ейлера E_2 (середина відрізка BH) лежать на цьому колі. Дійсно, H_1M_3 – медіана прямокутного ΔABH_1, проведена з вершини прямого кута, $H_1M_3 = ½AB$.

За властивістю середньої лінії M_1M_2 ΔABC маємо: $M_1M_2 = ½AB$. Отже, $H_1M_3 = M_1M_2$.

Крім того, M_2 M_3 || M_1H_1 (M_2M_3 || BC за властивістю середньої лінії). Отже, трапеція $M_1M_3M_2H_1$ – рівнобічна, а тому коло, яке проходить через три її вершини M_1, M_2, Mз, пройде і через четверту вершину H_1.

Пряма M_3E_2 || AH (M_3E_2 – середня лінія ΔBAH), пряма M_3M_2 || BC (M_3M_2 – середня лінія ΔABC), за умовою AH ⊥ BC. Отже, M_3E_2 ⊥ M_3M_2, тобто $\angle E_2M_3M_2 = 90^o$.

Пряма M_1E_2 || AH (M_1E_2 – середня лінія ΔBHC), пряма M_1M_2 || AB (M_1M_2 – середня лінія ΔABC), за умовою CH ⊥ AB. Отже, M_2E_1 ⊥ M_1M_2, тобто $\angle E_2M_1M_2 = 90^o$.

Навколо чотирикутника $M_3E_2M_1M_2$ можна описати коло, тому що сума протилежних кутів дорівнює 180^o.

Таким чином, коло, яке проходить через три точки M_1, M_2, M_3, проходить і через точки Hі і E_2.

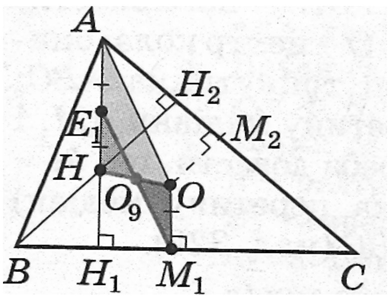
Аналогічно можна показати, що це коло пройде ще через точки E_1, E_3, H_2, H_3. Отже, основи медіан, основи висот і точки Ейлера лежать на одному колі.

VI. Закріплення та осмислення нового матеріалу

№1. Відновіть трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і точкою перетину серединних перпендикулярів O.

№2. Довести, що радіус кола дев'яти точок дорівнює $\frac{R}{2}$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення.



З'єднаємо точку M_1 з центром кола дев'яти точок O_9. Пряма M_1O_9 перетинає висоту AH_1 у точці E_1. E_1M_1 – діаметр кола дев'яти точок. $\Delta O_9M_1O = \Delta O_9E_1H$ за другою ознакою (HO_9 = = O_9O за доведеним, $E_1O_9 = O_9M_1$ як радіуси кола Ейлера і $\angle E_1O_9H = \angle OO_9M_1$ як вертикальні). Звідси $OM_1 = HE_1$. Оскільки OM_1 || HE_1 (як два перпендикуляри до BC) і $AE_1 = HE_1$, то чотирикутник AOM_1E_1 – паралелограм. Тоді M_1E_1 = OA, де M_1E_1 – діаметр кола дев'яти точок, а OA – радіус кола, описаного навколо трикутника. Отже, радіус кола дев'яти точок дорівнює $\frac{R}{2}$.

№3. Довести, що відрізки M_1E_1, M_2E_2, M_3E_3 мають спільну середину.

Доведення.

За доведенням чотирикутник OM_1HE_1 – паралелограм. Аналогічно можна довести, що чотирикутники OM_2HE_2 і OM_3HE_3 – також паралелограми. Всі вони мають спільну діагональ OH, середина якої є спільною серединою розглядуваних відрізків.

VII. Підсумки уроку

Вірите чи ні, що якщо кожний день по десять годин тільки переписувати труди Леонардо Ейлера, то не вистачить і сімдесяти шести років?

Так. Зібрання його творів склали 75 великих томи. Про нього говорили, що він «обчислює так, як людина дихає».

Контрольні запитання.

1. Які точки називають чудовими точками трикутника?
2. Які чудові точки лежать на одній прямі?
3. Сформулюйте лему.
4. Сформулюйте теорему Ейлера.

IX. Домашнє завдання

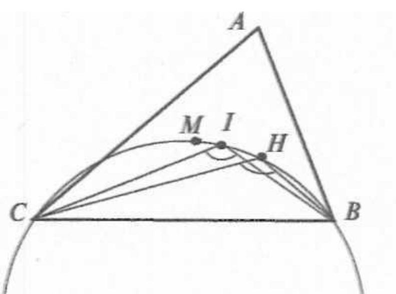
Вивчити зміст засвоєних на уроці понять.

№1. Відновіть трикутник ABC за центром описаного кола, ортоцентром і серединою сторони BC.

№2. Точки B, C, M, J, H трикутника ABC належать одному колу. Знайдіть його кути.

Розв’язання.

Очевидно, що ΔABC – гострокутний (оскільки M та J знаходяться всередині ΔABC, то й ортоцентр H згідно з умовою повинен знаходитися всередині ΔABC). $\angle BHC = \angle BJC$ як вписані, що спираються на одну дугу в колі ω.



$\angle BHC = 180° - \angle A$, $\angle BJC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. Тоді $180° - \angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle A$, звідки $\angle A =$

60º. Отже, ∠BHC = ∠BJC = 120º. Центральний ∠BOC = 2∠A = 120º. Таким чином, точки O, J і H належать колу. З іншого боку, точки O, M, H належать одній прямі – прямій Ейлера. Отже, точки співпадають. Значить ΔABC – рівносторонній, а ∠A = ∠B = ∠C = 60º.

Відповідь: 60º.

№3. (Наукова робота) Довести теорему про медіани трикутника.

Перша група за подібністю трикутників.

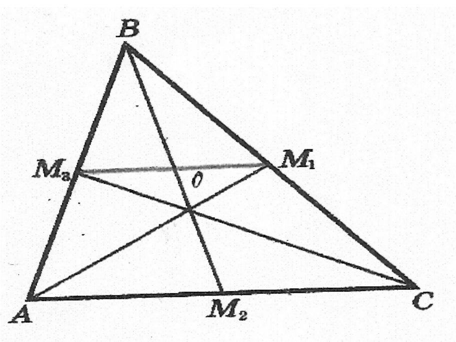
Друга група за теоремою Менелая.

Третя група за прямою Ейлера.

№1. *Перша група* доводила теорему про медіани трикутника за подібністю трикутників.

Доведення.

В ΔABC AM_1, BM_2, CM_3 медіани, які перетинаються в точці O. Проведемо M_1M_3 – середню лінію ΔABC. За властивістю середньої лінії M_1M_3 || AC ∠M_1AC =∠AM_1M_3, ∠M_3CA = ∠CM_3M_1 як внутрішні різносторонні при паралельних прямих та січні. Тоді ΔAOC



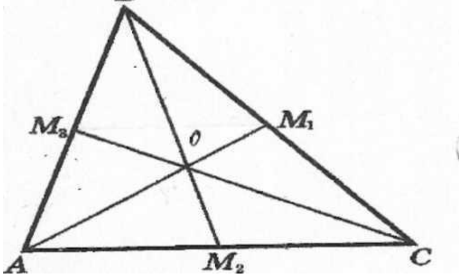
тами. Звідси AO : OM_1 = CO : OM_3 = = AC

середньої AC = = $2M_1M_3$, то AO : OM_1 = CO :

доводиться, що BO : OM_2 = = 2 : 1.

Друга група доводила за теоремою Менелая.

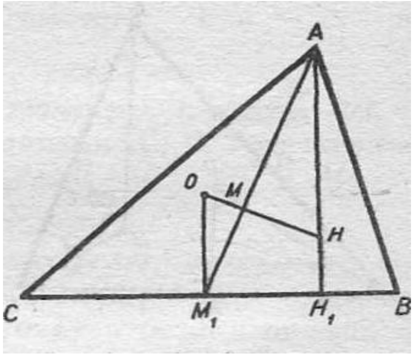
Доведення.



В ΔABC AM_1, BM_2, CM_3 медіани , які перетинаються в точці O. Пряма M_3C перетинає сторони AB і BM_2 ΔABM_2 та продовження сторони AM_2. Тоді за теоремою Менелая $\frac{\text{ÂÌ}_3}{\text{Ì}_3\text{Â}} \cdot \frac{\text{ÂÎ}}{\text{ÎÌ}_2} \cdot \frac{\text{Ì}_2\text{Ñ}}{\text{ÑÂ}} = 1$ або $1 \cdot \frac{\text{ÂÎ}}{\text{ÎÌ}_2} \cdot \frac{1}{2} = 1$. Звідси $\frac{\text{ÂÎ}}{\text{ÎÌ}_2} = \frac{2}{1}$.

Третя група за прямою Ейлера.

Доведення.



В ΔABC AM_1 медіана, AH_1 висота, точка O – центр описаного кола і точка H – ортоцентр. Позначимо через M точку перетину відрізків OH і AM_1. Оскільки $AH_1 \perp BC$ і $OM_1 \perp BC$ (OM_1 – серединний перпендикуляр), то $\Delta OM_1M \sim \Delta HAM$ за двом кутами ($\angle OMM_1 = \angle AMH$ як вертикальні і $\angle OM_1M = \angle MAH$ як внутрішні різносторонні). Отже, за лемою $AM : M_1M = 2 : 1$. Аналогічні міркування мають місце у випадку медіан BM_2 і CM_3. Медіани будуть ділитися точкою M у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершин.