Câu 33: **[1D5-2.5-3]** **(THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018)** Gọi $\left(C\right)$ là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+1$, M là điểm di động trên $\left(C\right)$; Mt,Mz là các đường thẳng đi qua M sao cho Mt song song với trục tung đồng thời tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt,Mz. Khi M di chuyển trên $\left(C\right)$ thì Mz luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $M_0\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $M_0\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $M_0\left(-1;1\right)$. **D.** $M_0\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi tọa độ điểm M là: $M\left(x_0;(x_0+1)^2\right)$.

Phương trình đường thẳng Mz có dạng: $y=k\left(x-x_0\right)+\left(x_0+1\right)^2 \Leftrightarrow kx-y-kx_0+\left(x_0+1\right)^2=0$

.

Phương trình đường thẳng Mt là: $x=x_0 \Leftrightarrow x-x_0=0$.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt,Mz là:

$$\frac{x-x_0}{1}-\frac{kx-y-kx_0+\left(x_0+1\right)^2}{\sqrt{k^2+1}}=0 \text{ hoặc } \frac{x-x_0}{1}+\frac{kx-y-kx_0+\left(x_0+1\right)^2}{\sqrt{k^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow y=\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)x+kx_0-x_0\sqrt{k^2+1}+\left(x_0+1\right)^2$$

hoặc $y=\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)x+kx_0+x_0\sqrt{k^2+1}+\left(x_0+1\right)^2$.

Mặt khác tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt,Mz nên:

$$\left[\begin{array}{l} y'\left(x_0\right)=k+\sqrt{k^2+1} \\ y'\left(x_0\right)=k-\sqrt{k^2+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0+2=k+\sqrt{k^2+1} \\ 2x_0+2=k-\sqrt{k^2+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\dfrac{1}{2}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right) \\ x_0+1=\dfrac{1}{2}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right) \end{array}\right. \text{ (*)}.$$

Thay (*) vào phương trình đường thẳng Mz ta có:

+) Với $x_0+1=\dfrac{1}{2}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)$ ta có:

$$Mz: kx-y-kx_0+\left(x_0+1\right)^2=0 \Leftrightarrow y=kx+k-k\left(x_0+1\right)+\left(x_0+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y=kx+k-k.\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)+\left[\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)\right]^2 \Leftrightarrow y=kx+k+\frac{1}{4}.$$

+) Với $x_0+1=\dfrac{1}{2}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)$ ta có:

$$Mz: kx-y-kx_0+\left(x_0+1\right)^2=0 \Leftrightarrow y=kx+k-k\left(x_0+1\right)+\left(x_0+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y=kx+k-k.\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)+\left[\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\right]^2 \Leftrightarrow y=kx+k+\frac{1}{4}.$$

Do đó phương trình đường thẳng Mz : $y = kx + k + \frac{1}{4}$.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định mà Mz luôn đi qua ta có: $y_0 = kx_0 + k + \frac{1}{4} \forall k \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow k(x_0+1) + \frac{1}{4} - y_0 = 0 \forall k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ \frac{1}{4} - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

Vậy Mz luôn đi qua điểm cố định $M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 46. **[1D5-2.5-3] THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$. **C.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. **D.** $y = -x + \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$, đặt $f(1) = a$ và $f'(1) = b$.

Ta cho $x = 0 \Rightarrow a^2 = -a^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right.$.

Đạo hàm 2 vế ta được $4f(1+2x).f'(1+2x) = 1 + 3[f(1-x)]^2 f'(1-x)$.

Cho $x = 0$ ta có $4ab = 1 + 3a^2b$.

□ Xét $a = 0$ thay vào $4ab = 1 + 3a^2b$ vô lý.

□ Xét $a = -1$ thay vào $-4b = 1 + 3b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{7}$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Câu 42. **[1D5-2.5-3] (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ $(ab \neq -2)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-2-ab}{(a-2)^2}$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0$ nên: $y'(1)=-3$ $\Leftrightarrow \frac{-2-ab}{(a-2)^2}=-3$.

Mặt khác $A(1;-2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-2=\frac{1+b}{a-2}$ $\Leftrightarrow b=-2a+3$.

Khi đó ta có $\frac{-2-ab}{(a-2)^2}=-3$ $\Leftrightarrow -2-a(-2a+3)=-3a^2+12a-12$, $a\neq 2$.

$\Leftrightarrow 5a^2-15a+10=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2(loai) \\ a=1 \end{array}\right.$.

Với $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a-3b=-2$.

Câu 43. **[1D5-2.5-3]** **(SỞ GD-ĐT GIA LAI -2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;2)$. Tìm tập hợp S là tập tất cả các giá trị thực của m để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A.

A. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.
B. $S=(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.
C. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.
D. $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};3\right)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$ là

$$y=\left(-3x_0{}^2+6x_0\right)(x-x_0)-x_0{}^3+3x_0{}^2-2.$$

* Để tiếp tuyến đi qua $A(m;2)$ điều kiện là $2=\left(-3x_0^2+6x_0\right)(m-x_0)-x_0^3+3x_0^2-2$

$\Leftrightarrow \left(3x_0^2-6x_0\right)m=2x_0^3-3x_0^2-4\ \ (1)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ 2x_0^2+(1-3m)x_0+2=0\ \ (2) \end{array}\right.$

Để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A điều kiện là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt đều khác $2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9m^2-6m-15>0 \\ m\neq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

Câu 49: **[1D5-2.5-3]** **(CHUYÊN KHTN -LẦN 1-2018)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là

A. $y=-x-2$.
B. $y=x+2$.
C. $y=x-2$.
D. $y=-x+2$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$.

Gọi $M\left(m;\dfrac{m+2}{2m+3}\right)\in(C)$, $m\ne-\dfrac{3}{2}$.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{(2x+3)^2}$ $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là:

$y=-\dfrac{1}{(2m+3)^2}(x-m)+\dfrac{m+2}{2m+3}$ $\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{(2m+3)^2}x+\dfrac{2m^2+8m+6}{(2m+3)^2}$.

$d\cap Oy=A\left(0;\dfrac{2m^2+8m+6}{(2m+3)^2}\right)$

$d\cap Ox=B\left(2m^2+8m+6;0\right)$.

Ba điểm O, A, B tạo thành tam giác $\Rightarrow\begin{cases}A\ne O\\B\ne O\end{cases}\Rightarrow 2m^2+8m+6\ne0$ $\Rightarrow\begin{cases}m\ne-1\\m\ne-3\end{cases}$.

Ta thấy ΔOAB vuông tại O nên theo giả thiết ΔOAB cân tại O

$\Leftrightarrow$ $OA=OB$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left|2m^2+8m+6\right|}{(2m+3)^2}=\left|2m^2+8m+6\right|$.

Vì $2m^2+8m+6\ne0$ nên phương trình tương đương với

$(2m+3)^2=1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\,(L)\\m=-2\,(TM)\end{array}\right.$.

Khi đó, $d:y=-x-2$.

Câu 39. **[1D5-2.5-3]** **(THPT HỒNG LĨNH HÀ TĨNH-2018)** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đến đồ thị (C).

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D.

Lấy bất kì $A(a,0)$. Đường thẳng đi qua A có hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)$ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow k(x-a)=x^3-3x^2+3x-1$ $\Leftrightarrow\left(3x^2-6x+3\right)(x-a)=x^3-3x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow$ $x^3-3(1+a)x^2+6ax-3a+1=0$ $\Leftrightarrow(x-1)\left(2x^2-(1-a)x+3a-1\right)=0$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow(x-1)g(x)=0$ có nghiệm kép

Để qua A kẻ được đúng một tiếp tuyến đến (C) thì $\begin{cases}\Delta=0\\g(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1$

Vậy điểm $A(1;0)$ thuộc đường thẳng $x=1$.

Câu 42. **[1D5-2.5-3]** **(THPT HỒNG LĨNH HÀ TĨNH-2018)** Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB=4\sqrt{2}$. Tính $S=3x_A-5x_B$

A. $S=-16$. **B.** $S=16$. **C.** $S=15$. **D.** $S=-9$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-3$. Theo đề bài ta có $y'(x_A)=y'(x_B)$ $\Leftrightarrow 3x_A^2-3=3x_B^2-3$ $\Leftrightarrow x_A^2=x_B^2$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A=x_B \\ x_A=-x_B \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x_A=-x_B$ (do A, B phân biệt)

$AB=4\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow AB^2=32$ $\Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=32$

$\Leftrightarrow 4x_B^2+\left(x_B^3-3x_B+1-x_A^3+3x_A-1\right)^2=32$ $\Leftrightarrow 4x_B^2+\left(x_B^3-3x_B+1-x_A^3+3x_A-1\right)^2=32$

$\Leftrightarrow 4x_B^2+\left(2x_B^3-6x_B\right)^2=32$ $\Leftrightarrow 4x_B^2+4x_B^6-24x_B^4+36x_B^2=32$ $\Leftrightarrow 4x_B^6-24x_B^4+40x_B^2-32=0$

$\Leftrightarrow x_B^2=4$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B=2, x_A=-2 \\ x_B=-2, x_A=2 \end{array}\right.$. Vậy $x_B=2, x_A=-2$ nên $S=3x_A-5x_B$ $=-16$.

Câu 39: **[1D5-2.5-3]** **(THPT YÊN ĐỊNH THANH HÓA -LẦN 1-2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}(H)$ .Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (H), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. **B.** $y=-x+1$.

C. $y=-x+2$. **D.** $y=-x-2$ và $y=-x-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tam giác OAB vuông cân tại O nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ±1.

Gọi tọa độ tiếp điểm là (x_0,y_0) ta có : $\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=\pm1 \Leftrightarrow x_0=-2$ .hoặc $x_0=-1$.

Với $x_0=-1, y_0=-1$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-x$.

Với $x_0=-2, y_0=0$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-x-2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (H) là: $y=-x-2$

Câu 40: **[1D5-2.5-3]** **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ (M,N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a>0$.

* Ta có $y'=x^3-7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{7} \\ x_0=\sqrt{7} \end{array}\right.$.

* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0;y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M,N) có hệ số góc: $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0;y_0)$ có hệ số góc $k=6>0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thì $-\sqrt{7}<x_0<0$ và $x_0\neq-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

* Ta có phương trình: $y'(x_0)=6 \Leftrightarrow x_0^3-7x_0-6=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-2 \\ x_0=-1 \\ x_0=3\ (l) \end{array}\right.$.

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.