ECOLE NORMALE SUPERIEURE
BP : 241 BAMAKO
TEL : 20 22 21 89 FAX : 20 23 04 61 E-mail : ensup@ml.refer.org

DER PHYSIQUE CHIMIE

MASTER PHYSIQUE S3

EXPOSE DE RELATIVITE

THEME :

TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

Exposé et présenté par le groupe 2 qui sont :

Nom	Prénom
CAMARA	Mohamed
COULIBALY	Moussa Kossa
DIABATE	Harouna

Sous la direction de :

Table des matières

Introduction :

Les lois de la mécanique sont remises en question mais pas les principes d'invariance qui, au contraire, se trouvent confirmés et étendus à tous les domaines de la physique. La transformation de Lorentz se distingue essentiellement de celle de Galilée par l'introduction de la relativité du temps qui fait que la vitesse absolue n'est plus simplement la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. Le référentiel R, dit de l'observateur, considéré en général comme immobile, correspond au référentiel absolu de la cinématique classique, R' au référentiel relatif et v à la vitesse d'entraînement. On se limite généralement à deux dimensions en faisant coïncider le vecteur vitesse avec l'axe des abscisses de sorte que les coordonnées y et z n'interviennent pas. La démonstration présentée ici est concise.

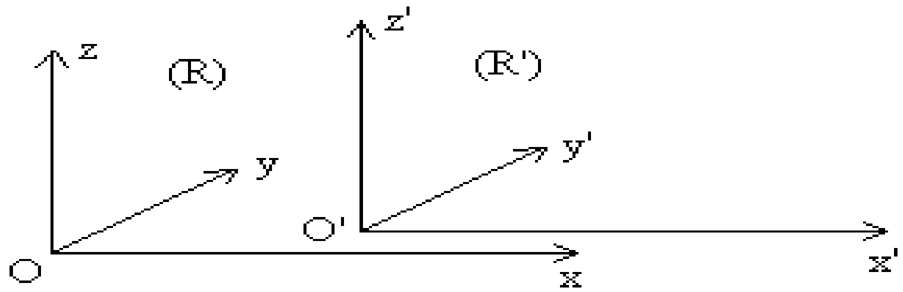
T.G$\{x' = x - vt \; y = y' \; z = z' \; t' = t$ T.L

$\{x' = \gamma(x - vt) \; y = y' \; z = z' \; t' = \gamma(t - \frac{\beta}{C}x)$

I- Transformation de LORENTZ

Considérons deux référentiels R et R', R' étant animé de la V/R. Pour simplifier le calcul on travaille d'abord dans le cadre des transformations dites spatiales qui se caractérisent par le fait que les systèmes d'axe x, y, z et x', y', z' sont parallèles et que ox et ox' sont communs et parallèles à la vitesse $\vec{v}$.

Si un évènement E se produit à un point ox ou o'x' c'est-à-dire y=z=0 et y'=z'=0 donc x' ne dépend que de x et t, y' et z' ne dépendent ni de x et ni de t, on pourra donc écrire :



$$x' = ax + bt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = dx + et$$

Déterminons alors les coefficients a, b, d, et e.

Le point o(x=0) a une vitesse $-\ v$ par rapport à R' et $x' =- vt'$, $t' = et$

Donc, $x' =- evt = bt \longrightarrow \boxed{b =- ev}$

Le point o' (x'=0) a une vitesse v/R donc : $x = vt$ et $x =- \frac{b}{a}t$ alors $b =- av$. On en déduit alors que :

$$\boxed{a = e}$$

Supposons qu'à t=o, une source placée en o' émette un signal lumineux. Un observateur lié à R voit une onde sphérique se propageant à la vitesse c et atteignant un point de coordonnées (x, y, z, t) tel que $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$

Un observateur lié à R' verra également se propager une onde sphérique atteignant au temps t'un point de coordonnées (x', y', z', t') tel que :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

Compte tenu que y=y' et z=z' : $x^2 - c^2t^2 = x'^2 + c^2t'^2$

Remplaçons x' et t' par leurs expressions en fonction de x et t.

$$x^2 - c^2t^2 = (ax - avt)^2 - c^2(dx + at)^2$$

$$x^2 - c^2t^2 = x^2\left(a^2 - c^2d^2\right) - 2xt\left(a^2v + c^2ad\right) + \left(a^2v^2 - c^2a^2\right)t^2$$

Par identification:

$$\{a^2 - c^2d^2 = 1\ av + c^2d = 0\ a^2\left(v^2 - c^2\right) =- c^2$$

On tire: $a = e = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $b = \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $d = \frac{\frac{-v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

D'où les transformations de Lorentz :

$$\{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ y' = y\ z' = z\ t' = \frac{\frac{-v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad ,\{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ y = y'\ z = z'\ t = \frac{\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Remarque 1:

Ces formules impliquent nécessairement que $v << c$. La célérité de la lumière apparait comme une limite qu'on saurait dépasser. On pose en générale :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ;\ \beta = \frac{v}{c}$$

D'où :

$$\{x' = \gamma(x - \beta ct)\ y' = y\ z' = z\ t' = \frac{\gamma}{c}(ct - \beta x)$$

On peut traduire cette correspondance entre R et R' sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

La matrice de passage L telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$, est appelée matrice de LORENTZ.

On obtiendra la matrice de passage de R' à R en changeant $v\ en - v,\ donc\ \beta\ en - \beta$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : la matrice complète de LORENTZ contient une sous matrice relative aux seules coordonnées qui se transforment

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \text{ pouvant s'écrire } \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \text{-}\mathrm{sh}\varphi \\ \text{-}\mathrm{sh}\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}} = \beta$$

<u>Remarque 2 :</u>

Si $\frac{v}{c} \ll 1$, les formules de transformations s'écrivent :

$$\{x^{'} = x - vt\, y^{'} = y\, z^{'} = z\, t^{'} = t$$

On retrouve la mécanique Newtonienne avec le caractère absolu du temps et le théorème de composition de vitesse classique.

<u>II- Conséquences des transformations de LORENTZ :</u>

<u>1- Dilatation des temps :</u>

Soient deux horloges synchronisées au repos liés à R et R'. Supposons l'horloge de R' fixe en un point de o'x' d'abscisse x' et soit Δt' l'intervalle de temps correspondant mesuré par un observateur de R. $\Delta t'$est appelé durée propre ou temps propre entre les instants $t_1^{'}$ et $t_2^{'}$.

Au temps $t_1^{'}$ de R' correspond un temps t_1 de R, le pointage étant fait par l'observateur de R au point x_1. Au temps $t_2^{'}$ correspond un temps t_2 , on a alors :

$$x^{'} = \gamma(x_1 - \beta c t_1)$$

$$x^{'} = \gamma(x_2 - \beta c t_2)$$

$$\gamma\left(x_1 - \beta c t_1\right) = \gamma(x_2 - \beta c t_2)$$

$$\boxed{x_2 - x_1 = \beta c(t_2 - t_1)}$$

D’autre part :

$$ct'_1 = \gamma\left(ct_1 - \beta x_1\right)$$

$$ct'_2 = \gamma\left(ct_2 - \beta x_2\right)$$

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma[c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1)]$$

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma[c(t_2 - t_1) - \beta^2 c(t_2 - t_1)]$$

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma c(t_2 - t_1)(1 - \beta^2)$$

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma c(t_2 - t_1)(\frac{1}{\gamma^2})$$

$$(t'_2 - t'_1) = (\frac{t_2 - t_1}{\gamma}) \Longrightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$\Delta t > \Delta t'$, il y a dilatation des durées

Δt est un temps impropre.

L’intervalle de temps propres entre deux évènements est inférieur aux intervalles de temps impropres.

2- Contraction des longueurs :

Soit dans le référentiel R’, une barre de longueur L_0 fixe parallèle à o’x’ dont les extrémités occupent à un instant donné les positions d’abscisse $x'_1 et\ x'_2$, donc $L_0 = x'_2 - x'_1$ est appelée longueur propre de la barre.

Pour un observateur lié à R les extrémités occupent les positions $x_1 et\ x_2$. Pour cet observateur la barre aura une longueur apparente $L = x_2 - x_1$.

Pour mesurer cette longueur, l’observateur doit pointer les deux extrémités de la barre aux mêmes instants $t_1 = t_2$.

D’après les transformations de LORENTZ :

$$x'_1 = \gamma\left(x_1 - \beta c t_1\right) \quad et \quad x'_2 = \gamma\left(x_2 - \beta c t_2\right) \ \ et\ plus\ que$$

$$t_1 = t_2,\ on\ a$$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma\left(x_2 - x_1\right) - \beta c(t_2 - t_1)$$

Donc, $L_0 = \gamma L \Longrightarrow \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$L < L_0$, il y a contraction des longueurs. Il est bien évident qu’un observateur lié à R’ observera le même résultat pour une barre fixe dans R. Les deux référentiels R et R’ sont parfaitement équivalents et ne peuvent donc être distingués l’un de l’autre ce qui est conforme au principe de la relativité.