

## Лекція 9

### 5 Дискретизація. Спектральний аналіз дискретних сигналів

Згадаємо, що таке цифровий сигнал (рис. 5.1 – 5.3).

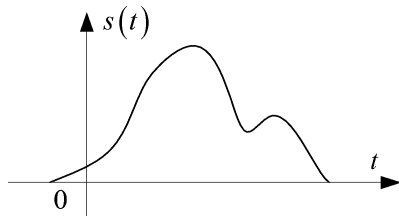


Рисунок 5.1 – Аналоговий сигнал

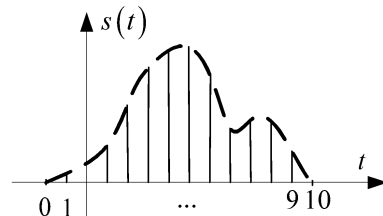


Рисунок 5.2 – Дискретний сигнал  
(дискретизований за часом)

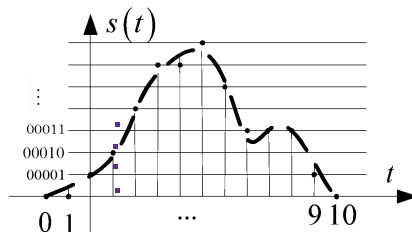


Рисунок 5.3 – Цифровий сигнал (дискретизований за часом та квантований за рівнем)

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів показана на рис. 5.4.

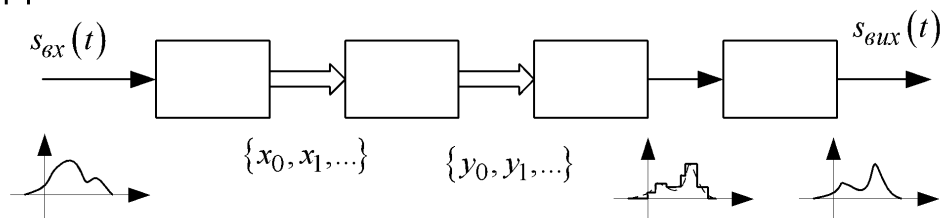


Рисунок 5.4.

На вході – аналоговий сигнал  $s_{ex}(t)$ , в аналогово-цифровому перетворювачі (АЦП) відбувається дискретизація, квантування за рівнем та цифрове кодування цього сигналу, отримуємо на виході АЦП цифровий сигнал, що відповідає  $s_{ex}(t)$  (послідовність чисел). Цифровий процесор (ЦП) виконує необхідну обробку вхідного сигналу, на його виході – нова послідовність чисел (цифровий вихідний сигнал). В цифро-аналоговому перетворювачі (ЦАП) цифровий сигнал перетворюється у ступінчастий сигнал, який потім згладжується у фільтрі (Ф). Отримуємо на виході аналоговий сигнал  $s_{вux}(t)$ .

### 5.1 Шуми квантування

При представленні відліків дискретного сигналу у вигляді чисел з обмеженою розрядністю відбувається їх округлення. Різниця між початковим значенням та результатом округлення називається **шумом квантування**. Наприклад, нехай є деякий гармонійний сигнал  $s(t)$ , результат його квантування  $s_k(t)$  (без дискретизації за часом), та шум, що виникає при цьому,  $e(t) = s(t) - s_k(t)$  (рис. 5.5).

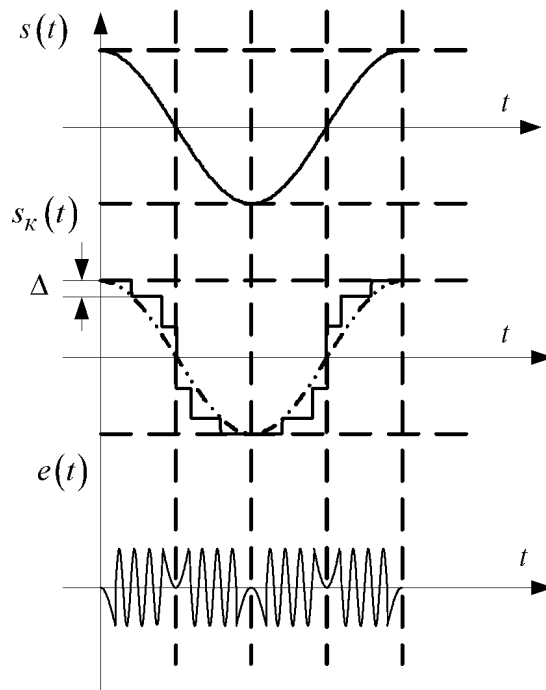


Рисунок 5.5

Значення шуму знаходяться в межах

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e(t) \leq \frac{\Delta}{2},$$

де  $\Delta$  – відстань між найближчими можливими значеннями квантованого сигналу.

У більшості випадків  $e(t)$  можна вважати випадковим процесом з нульовим математичним очікуванням та дисперсією  $e(kT)$ . Після дискретизації  $e(t)$  – послідовність чисел  $e(kT)$ , що утворює дискретний випадковий процес, та відліки цього процесу можна вважати некорельованими друг із другом.

### 5.2 Теорема Котельникова

Будь-який сигнал  $s(t)$ , спектр якого не містить складових із частотами вище деякого значення  $\omega_g = 2\pi f_g$ , може бути без втрати інформації представлений своїми дискретними відліками  $\{s(kT)\}$ , які взято з інтервалом, що задовольняє наступній нерівності

$$T < \frac{1}{2f_g}, T < \frac{\pi}{\omega_g}. \quad (5.1)$$

Строго все вищесказане може бути застосовано для особливого класу сигналів. Сигнали, у яких спектральна щільність не дорівнює нулю тільки в межах деякого інтервалу кінцевої протяжності, називаються сигналами з обмеженим спектром.

АЛЕ! Якщо є сигнал, спектр якого не обмежений, але відомо, що більша частина енергії цього сигналу зосереджена в низькочастотній області, а «хвости» швидко затухають, то такий сигнал може бути наближено описаний за допомогою теореми Котельникова.

Відновлення початкового безперервного сигналу  $s(t)$  за набором його дискретних відліків  $\{s(kT)\}$  виконується за допомогою ряду Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}, \quad (5.2)$$

де  $s(kT)$  – дискретизований сигнал.

Формула (5.2) – розкладання в узагальнений ряд Фур'є по системі функцій  $\{\varphi_k(t)\}$ , що називається базисом Котельникова:

$$\{\varphi_k(t)\} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} = \varphi_0(t-kT). \quad (5.3)$$

Цей базис побудовано з однієї функції методом її здвигу по вісі  $t$  на величину  $kT$  таким чином, що функція  $\varphi_k(t)$  досягає максимуму, коли всі інші функції базису дорівнюють нулю (рис. 5.6). За аналогічним принципом будується базис з вейвлетів при вейвлет-аналізі, який ми розглядали раніше.

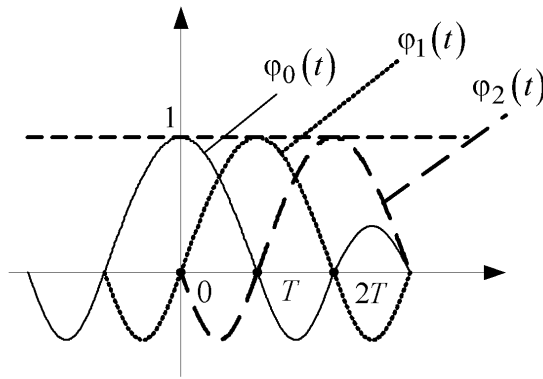


Рисунок 5.6.

Розглянемо функцію  $\varphi_0(t)$  (функція виду  $\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ) та її спектральну щільність  $S_0(\omega)$ . Вона має вигляд прямокутника (рис. 5.7)

$$S_0(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

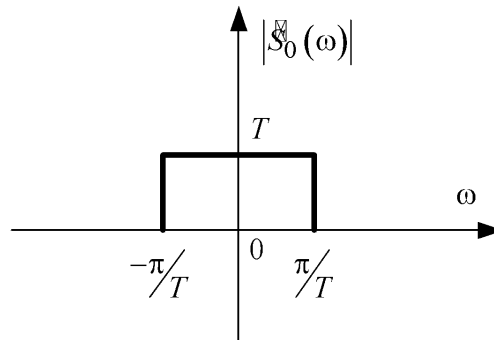


Рисунок 5.7.

Спектральна щільність всієї решти функцій в базисі у відповідності з властивістю ПФ про здвиг за часом, дорівнює:

$$S_k(\omega) = S_0(\omega) e^{-j\omega kT},$$

тобто відрізняється додатковим фазовим множником  $e^{-j\omega kT}$ .