Лекція 9

5 Дискретизація. Спектральний аналіз дискретних сигналів

Згадаємо, що таке цифровий сигнал (рис. 5.1 – 5.3).

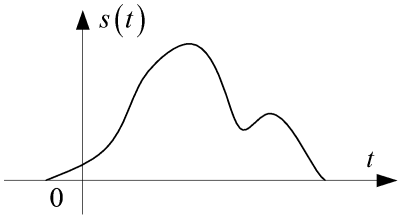


Рисунок 5.1 – Аналоговий сигнал

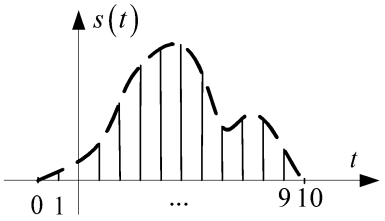


Рисунок 5.2 – Дискретний сигнал (дискретизований за часом)

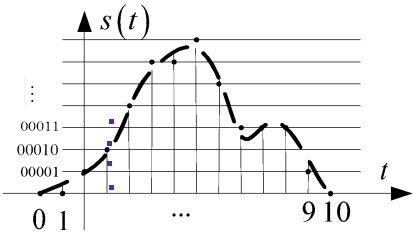


Рисунок 5.3 – Цифровий сигнал (дискретизований за часом та квантований за рівнем)

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів показана на рис. 5.4.

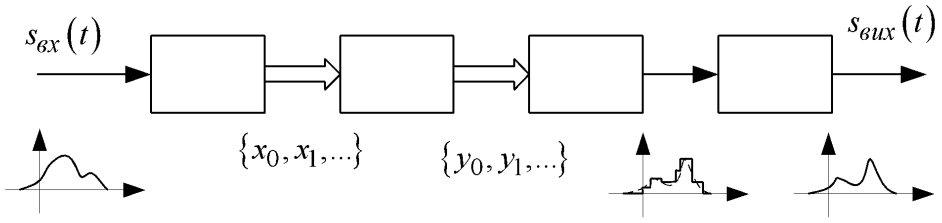


Рисунок 5.4.

На вході – аналоговий сигнал $s_{вх}(t)$, в аналогово-цифровому перетворювачі (АЦП) відбувається дискретизація, квантуванні за рівнем та цифрове кодування цього сигналу, отримаємо на виході АЦП цифровий сигнал, що відповідає $s_{вх}(t)$ (послідовність чисел). Цифровий процесор (ЦП) виконує необхідну обробку вхідного сигналу, на його виході – нова послідовність чисел (цифровий вихідний сигнал). В цифро-аналоговому перетворювачі (ЦАП) цифровий сигнал перетворюються у ступінчастий сигнал, який потім згладжується у фільтрі (Ф). Отримуємо на виході аналоговий сигнал $s_{вих}(t)$.

5.1 Шуми квантування

При представленні відліків дискретного сигналу у вигляді чисел з обмеженою розрядністю відбувається їх округлення. Різниця між початковим значенням та результатом округлення називається **шумом квантування**. Наприклад, нехай є деякий гармонійний сигнал $s(t)$, результат його квантування $s_K(t)$ (без дискретизації за часом), та шум, що виникає при цьому, $e(t) = s(t) - s_K(t)$ (рис. 5.5).

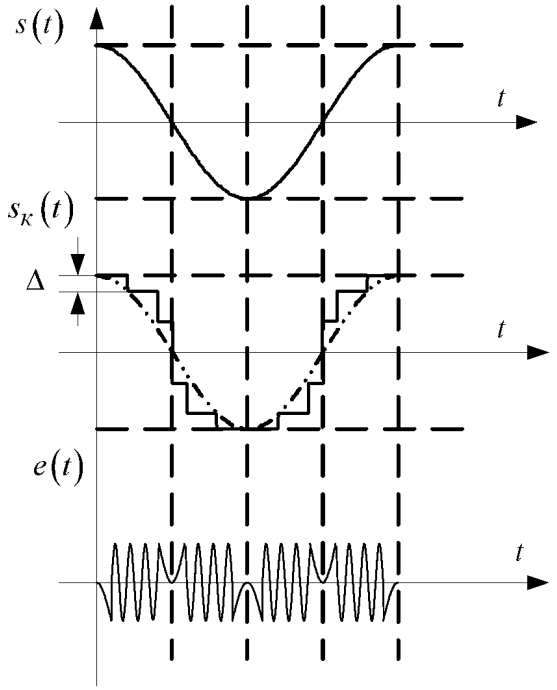


Рисунок 5.5

Значення шуму знаходяться в межах

$$-\frac{\Delta}{2} \le e(t) \le \frac{\Delta}{2},$$

де Δ – відстань між найближчими можливими значеннями квантованого сигналу.

У більшості випадків $e(t)$ можна вважати випадковим процесом з нульовим математичним очікуванням та дисперсією $e(kT)$. Після дискретизації $e(t)$ – послідовність чисел $e(kT)$, що утворює дискретний випадковий процес, та відліки цього процесу можна вважати некорельованими друг із другом.

5.2 Теорема Котельникова

Будь-який сигнал $s(t)$, спектр якого не містить складових із частотами вище деякого значення $\omega_в = 2\pi f_в$, може бути без втрати інформації представлений своїми дискретними відліками $\{s(kT)\}$, які взято з інтервалом, що задовольняє наступній нерівності

$$T < \frac{1}{2f_в}, T < \frac{\pi}{\omega_в}. \quad (5.1)$$

Строго все вищесказане може бути застосовано для особливого класу сигналів. Сигнали, у яких спектральна щільність не дорівнює нулю тільки в межах деякого інтервалу кінцевої протяжності, називаються сигналами з обмеженим спектром.

АЛЕ! Якщо є сигнал , спектр якого не обмежений, але відомо, зо більша частина енергії цього сигналу зосереджена в низькочастотній області, а «хвости» швидко затухають, то такий сигнал може бути наближено описаний за допомогою теореми Котельникова.

Відновлення початкового безперервного сигналу $s(t)$ за набором його дискретних відліків $\{s(kT)\}$ виконується за допомогою ряду Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}, \quad (5.2)$$

де $s(kT)$ – дискретизований сигнал.

Формула (5.2) – розкладання в узагальнений ряд Фур'є по системі функцій $\{\varphi_k(t)\}$, що називається базисом Котельникова:

$$\{\varphi_k(t)\} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} = \varphi_0(t-kT). \quad (5.3)$$

Цей базис побудовано з однієї функції методом її здвигу по вісі t на величину kT таким чином, що функція $\varphi_k(t)$ досягає максимуму, коли всі інші функції базису дорівнюють нулю (рис. 5.6). За аналогічним принципом будується базис з вейвлетів при вейвлет-аналізі, який ми розглядали раніше.

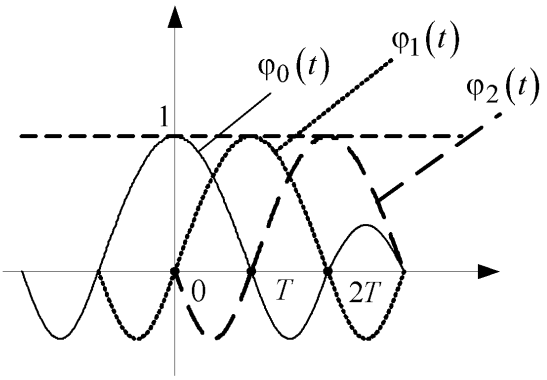


Рисунок 5.6.

Розглянемо функцію $\varphi_0(t)$ (функція виду $\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$) та її спектральну щільність $\dot{S}_0(\omega)$. Вона має вигляд прямокутника (рис. 5.7)

$$\dot{S}_0(\omega) = \begin{cases} T, |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ 0, |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}.$$

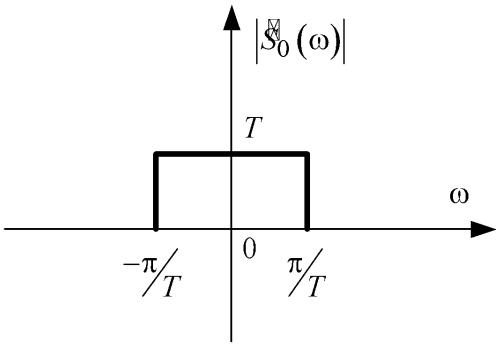


Рисунок 5.7.

Спектральна щільність всієї решти функцій в базисі у відповідності з властивістю ПФ про здвиг за часом, дорівнює:

$$\dot{S}_k(\omega) = \dot{S}_0(\omega) e^{-j\omega kT},$$

тобто відрізняється додатковим фазовим множником $e^{-j\omega kT}$.