

Université Sultan Moulay Slimane

Année Universitaire 2020/2021

FST Béni Mellal

Département : Génie Mécanique

Module : Mécanique du Point Matériel et Optique Géométrique

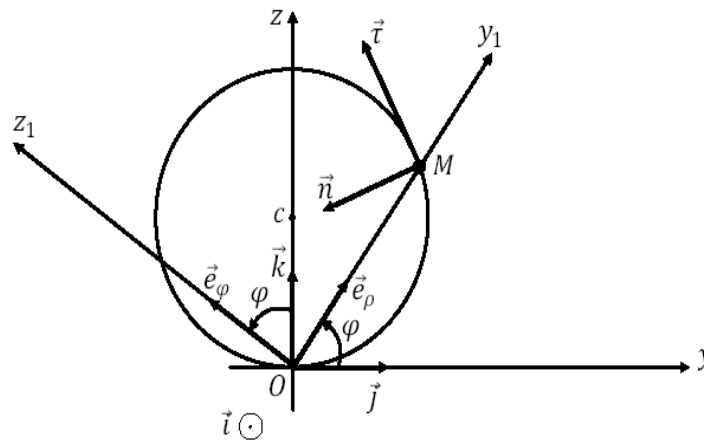
Option : MIPC –GE/GM

TD N°4

Exercice n°1

Soient $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ un référentiel absolu supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_1(O, x_1, y_1, z_1)$ un référentiel relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{l})$. A cours du temps, les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical

(yOz) , une tige circulaire de centre c et de rayon a est maintenue fixe. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré par $\overrightarrow{OM} = 2a \sin \varphi \vec{e}_\rho$ où $\varphi = \widehat{(\vec{j}, \overrightarrow{OM})}$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{l})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle). L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\vec{k}$.

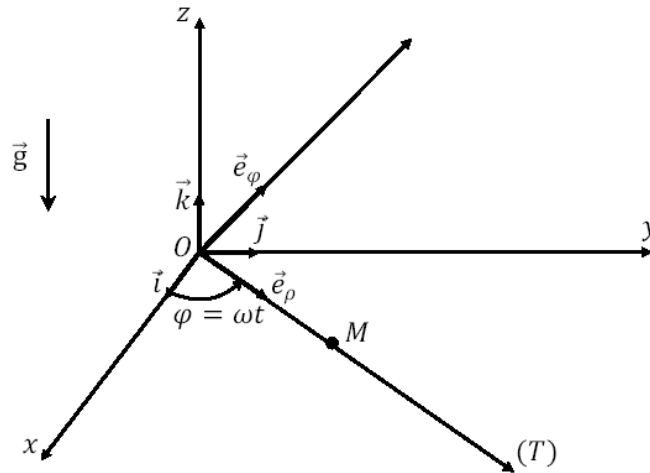


- 1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi} \vec{l}$.
- 2) Calculer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entraînement de M .
- 3) En déduire que la vitesse absolue de M est donnée par : $\vec{V}_a(M) = 2a\dot{\varphi}(\cos\varphi \vec{e}_\rho + \sin\varphi \vec{e}_\varphi)$.
- 4) Donner les expressions des vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.
- 5) Donner les expressions des forces appliquées à l'anneau M dans $\mathcal{R}$.
- 6) a) Calculer $\vec{\sigma}_c(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\mathcal{R}$.
b) Calculer les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$.
c) En appliquant le théorème du moment cinétique, Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2a} \sin(2\varphi) = 0$$

Exercice n°2

Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m . Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overline{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

- 1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de a , t et ω .
- 2) Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.
- 3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M .
- 4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.
- 5) Déterminer $E_c(M/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathcal{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.
- 6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .
- 7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

Correction TD n°3

Correction Exercice n°1

1. La vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi} \vec{t}$$

2. a) Calcule des vitesses relative et absolue de M :

$$\vec{V}_r(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = 2a\dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}_a(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 2a\dot{\varphi} (\cos\varphi \vec{e}_\rho + \sin\varphi \vec{e}_\varphi)$$

b) Le vecteur tangent à la trajectoire :

$$\vec{t} = \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|} = (\cos\varphi \vec{e}_\rho + \sin\varphi \vec{e}_\varphi)$$

3. Vitesse absolue de M :

$$\vec{V}_a(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 2a\dot{\varphi} (\cos\varphi \vec{e}_\rho + \sin\varphi \vec{e}_\varphi)$$

4. Le vecteur normal à la trajectoire :

$$\vec{n} = -\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi$$

5. les expressions des forces appliquées à l'anneau M dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{P} = -mg(\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{R} = R(-\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi)$$

6. a) le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{\sigma}_c \left(\frac{M}{\mathcal{R}} \right) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V} \left(\frac{M}{\mathcal{R}} \right) = 2aR\dot{\varphi} \vec{t}$$

b) les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{P} = -2mgR\cos\varphi\sin\varphi \vec{t}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{R}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

c) Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_c \left(\frac{M}{\mathcal{R}} \right)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P}/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{R}/\mathcal{R}) \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{2a} \sin(2\varphi) = 0$$

Correction Exercice n°2

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de a , t et ω .

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -at\omega^2\vec{e}_\rho + 2a\omega\vec{e}_\varphi$$

Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = at\vec{e}_\rho \wedge m(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi) = ma^2t^2\omega\vec{k}$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 2ma^2t\omega\vec{k}$$

2) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M .

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = at\vec{e}_\rho \wedge F\vec{e}_\rho = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = at\vec{e}_\rho \wedge -mg\vec{k} = atmg\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = at\vec{e}_\rho \wedge (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k}) = atR_\varphi\vec{k} - atR_k\vec{e}_\varphi = at(-R_k\vec{e}_\varphi + R_\varphi\vec{k})$$

3) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R})$$

$$\Rightarrow 2ma^2t\omega\vec{k} = at(mg - R_k)\vec{e}_\varphi + atR_\varphi\vec{k}$$

$$\Rightarrow R_\varphi = 2ma\omega \quad \text{et} \quad R_k = mg$$

4) Déterminer $E_c(M/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathcal{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(a^2 + a^2t^2\omega^2)$$

$$\left. \frac{dE_c(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = ma^2\omega^2t$$

5) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .

$$\vec{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = F\vec{e}_\rho \cdot (a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi) = Fa$$

$$\vec{P}(\vec{P}/\mathcal{R}) = \vec{P} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = -mg\vec{k} \cdot (a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/\mathfrak{R}) = \vec{R} \cdot \vec{V}(M/\mathfrak{R}) = (R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_k \vec{k}) \cdot (a \vec{e}_\rho + at\omega \vec{e}_\varphi) = R_\varphi at\omega = 2ma^2\omega^2 t$$

6) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

$$\left. \frac{dE_c(M/\mathfrak{R})}{dt} \right|_{\mathfrak{R}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{F}/\mathfrak{R}) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{P}/\mathfrak{R}) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow ma^2\omega^2 t = Fa + 2ma^2\omega^2 t$$

$$\Rightarrow F = -ma\omega^2 t$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -ma\omega^2 t \vec{e}_\rho$$