

20.09.2022

**Тема: Розв'язування логарифмічних рівнянь**

Посилання на підручник:  
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

**Матеріали до теми:**

**В основному, усі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв'язувати, зводяться до розв'язування найпростіших рівнянь.**

**Приклад 1.** Розв'яжіть рівняння  $\log_3(2x + 1) = 2$ .

*Розв'язання*

За означенням логарифма маємо

$$2x + 1 = 3^2, 2x = 8, x = 4.$$

Перевірка:  $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$ .

Відповідь: 4.

**Приклад 2.** Розв'яжіть рівняння  $\log_3 x = \log_3(6 - x^2)$ .

*Розв'язання*

Із рівності логарифмів чисел випливає

$$x = 6 - x^2; x^2 + x - 6 = 0; x_1 = -3; x_2 = 2.$$

Перевірка:

1) число - 3 не є коренем даного рівняння, бо вираз  $\log_3(-3)$  — не визначений;

$$2) \log_3 x = \log_3 2; \log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = \log_3 2.$$

Відповідь: 2.

**Приклад 3.** Розв'яжіть рівняння  $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$ .

*Розв'язання*

За означенням логарифма маємо

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^2; 2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1; x^2 - 2x = 0; x_1 = 0; x_2 = 2.$$

Перевірка:

1) значення  $x = 0$  не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма  $x + 1$  не повинна дорівнювати 1;

$$2) \log_{2+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2.$$

Відповідь: 2.

Зазначимо, що в прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не призводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного з одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості у рівносильності рівнянь.

## **Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь**

### **1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.**

**Приклад 4.** Розв'яжіть рівняння  $\log^2_2 x - 3 \log_2 x = 4$ .

*Розв'язання*

Позначимо  $\log_2 x$  через  $y$ . Дане рівняння набуває вигляду:

$$y^2 - 3y = 4; y^2 - 3y - 4 = 0; y_1 = 4; y_2 = -1.$$

$$\text{Звідси } \log_2 x = 4, \log_2 x = -1; x = 2^4, x = 2^{-1}; x = 16, x = \frac{1}{2}.$$

Перевірка:

$$1) \log^2_2 16 - 3 \log_2 16 = 16 - 12 = 4;$$

$$2) \log^2_2 \frac{1}{2} - 3 \log_2 \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4.$$

Відповідь: 16,  $\frac{1}{2}$ .

### **2. Метод потенціювання.**

**Приклад 5.** Розв'яжіть рівняння  $\log_5 (x - 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 (x + 2)$ .

*Розв'язання*

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$$\log_5 ((x - 1)(x - 2)) = \log_5 (x + 2); (x - 1)(x - 2) = x + 2;$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = x + 2; x^2 - 4x = 0; x(x - 4) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x = 4.$$

Перевірка:

1) значення  $x = 0$  не є коренем рівняння, тому що вирази  $\log_5(x - 1)$  і  $\log_5(x - 2)$  не мають змісту при  $x = 0$ ;

$$2) \log_5(x - 1) + \log_5(x - 2) = \log_5(4 - 1) + \log_5(4 - 2) = \log_5 3 + \log_5 2 = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5 6.$$

Отже,  $x = 4$  — корінь.

*Відповідь:* 4.

### 3. Метод зведення логарифмів до однієї основи.

**Приклад 6.** Розв'яжіть рівняння  $\log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 3 \cdot \log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x}$

*Розв'язання*

$$\log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 3; \log_3 x - 2 \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3; \log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3;$$

$$\log_3 x + 2 \log_3 x = 3; 3 \log_3 x = 3; \log_3 x = 1; x = 3.$$

Перевірка:  $\log_3 3 - 2 \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$ . Отже,  $x = 3$  — корінь.

*Відповідь:* 3.

### 4. Метод логарифмування.

**Приклад 7.** Розв'яжіть рівняння  $x^{\lg x} = 100x$ .

*Розв'язання*

Про логарифмуємо обидві частини рівності ( $x > 0$ ) і одержимо

$$\lg x^{\lg x} = \lg(100x); \lg x \lg x = \lg 100 + \lg x; \lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Замінімо  $\lg x = y$ . Рівняння набуває вигляду:

$$y^2 - y - 2 = 0; y_1 = 2; y_2 = -1.$$

Тоді: 1)  $\lg x = 2; x = 10^2; x = 100$ .

2)  $\lg x = -1; x = 10^{-1} = 0,1$ .

Перевірка:

1)  $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2; 100x = 100 \cdot 100 = 100^2$ . Отже,  $x = 100$  — корінь;

2)  $x^{\lg x} = 0,1^{\lg 0,1} = 0,1^{-1} = \frac{1}{0,1} = 10; 100x = 100 \cdot 0,1 = 10$ . Отже,  $x = 0,1$

— корінь.

*Відповідь:* 100; 0,1.

### 5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь.

**Приклад 8.** Розв'яжіть рівняння  $\lg x = 1 - x$  графічно.

*Розв'язання*

В одній і тій самій системі координат побудуємо графіки функції  $y = \lg x$  і  $y = 1 - x$  (рис. 3). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже,  $x = 1$  — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.

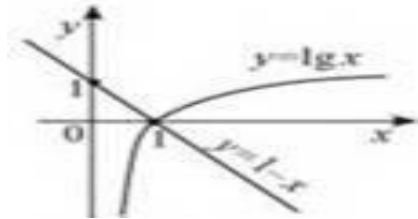


Рис. 3

Зауваження. Корінь цього рівняння легко знайти усно, однак треба пам'ятати, що в цьому випадку необхідно доводити той факт, що знайдений корінь єдиний.

**Завдання:**

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 6.
2. Законспектувати означення, властивості.
3. Виконати письмово вправи: 6.5, 6.7.

**ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!!** Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net), у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net).