

Лекція 17

Вираз (10.2) показує, що частотний коефіцієнт служить множником пропорційності між спектральними щільностями сигналів на вході та на виході системи

$$\dot{S}_{BHX}(\omega) = K(j\omega) \cdot \dot{S}_{BX}(\omega), \quad (10.3)$$

тобто ефект перетворення сигналу в системі відображається просто алгебраїчною операцією множення.

Необхідно відмітити, що спектральний та часовий метод (метод імпульсної характеристики) еквівалентні один одному. Розглянемо інтеграл Дюамеля

$$u_{BHX}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{BX}(\tau) h(t-\tau) d\tau,$$

інакше можна записати у вигляді згортки вхідного сигналу та імпульсної характеристики

$$u_{BHX}(t) = u_{BX}(t) * h(t).$$

Таким чином, при спектральному методі необхідно розв'язувати інтеграл (10.2), складність рішення такої задачі визначається складністю цього інтеграла. Цей метод може бути застосований при дослідженні ЛСС у

сталому режимі із впливами, які задовольняють умові: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$, та дозволяє вирішувати наступні задачі:

1. Знаючи $u_{BX}(t), K(j\omega)$ знайти $u_{BHX}(t)$, алгоритм розв'язання наступний:

1) $\dot{U}_{BX}(\omega) = F\{u_{BX}(t)\};$

2) $\dot{U}_{BHX}(\omega) = K(j\omega) \cdot \dot{U}_{BX}(\omega);$

3) $u_{BHX}(t) = F^{-1}\{\dot{U}_{BHX}(\omega)\}.$

2. Розв'язання зворотної задачі визначення $u_{BX}(t)$ при відомих $K(j\omega), u_{BHX}(t)$:

1) $\dot{U}_{BHX}(\omega) = F\{u_{BHX}(t)\};$

$$2) \quad \dot{U}_{BX}(\omega) = \frac{\dot{U}_{BHX}(\omega)}{K(j\omega) + \alpha}, \text{ тут } \alpha - \text{мала домішка, яка виключає ділення на}$$

нуль;

$$3) \quad u_{BX}(t) = F^{-1}\{\dot{U}_{BX}(\omega)\}.$$

3. Знаходження невідомого коефіцієнта передачі при відомих $u_{BHX}(t)$ і $u_{BX}(t)$:

$$1) \quad \dot{U}_{BHX}(\omega) = F\{u_{BHX}(t)\};$$

$$2) \quad \dot{U}_{BX}(\omega) = F\{u_{BX}(t)\};$$

$$3) \quad K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{BHX}(\omega)}{\dot{U}_{BX}(\omega)}.$$

11 Перетворення Лапласа. Комплексна частота

Перетворення Лапласа (ПЛ) – ще одне з інтегральних перетворень, яке використовується в радіотехніці для рішення різних задач, в тому числі при дослідженні процесів проходження сигналів через ЛСС.

Введемо поняття комплексної частоти. Для цього розглянемо сигнал виду e^{pt} , де p – комплексне число $p = \sigma + j\omega$, таке число називають комплексною частотою. З двох таких сигналів можна скласти речовий сигнал, наприклад, за таким правилом:

$$s(t) = \frac{1}{2}(e^{pt} + e^{p^*t}), \quad (11.1)$$

де $p^* = \sigma - j\omega$ – комплексно-сполучена величина.

Дійсно, при цьому

$$s(t) = \frac{1}{2}(e^{\sigma t + j\omega t} + e^{\sigma t - j\omega t}) = \frac{1}{2}e^{\sigma t}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = e^{\sigma t} \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t \quad (11.2)$$

речова величина.

В залежності від вибору речової та уявної частин комплексної частоти можна отримати різні речові сигнали. Так, якщо $\sigma = 0$, але $\omega \neq 0$, отримаємо звичайні гармонічні коливання виду $\cos \omega t$. Якщо $\omega = 0$, то в залежності від знака σ отримаємо або наростаючі, або спадаючі у часі експонентні коливання. Більш складну форму такі сигнали мають, якщо $\omega \neq 0$. При цьому множник $e^{\sigma t}$ описує огинаючу, яка за експонентою змінюється у часі. Деякі типові сигнали зображені на рис. 11.1.

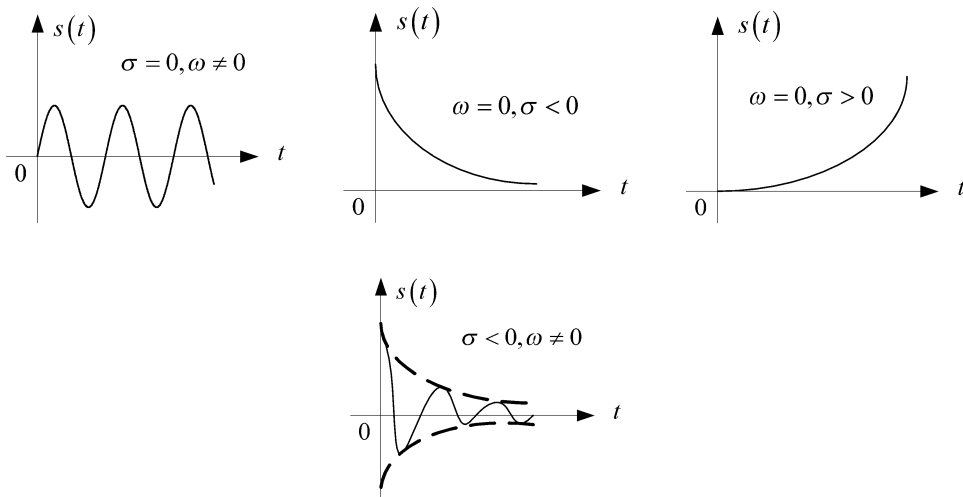


Рисунок 11.1

Таким чином, поняття комплексної частоти дозволяє отримувати спектральні представлення сигналів, не використовуючи загальних функцій, математичні моделі яких не інтегруються. Істинна фізична частота ω служить уявною частиною комплексної частоти $p = \sigma + j\omega$. Для речової частини комплексної частоти σ терміна не існує.

11.1 Перетворення Лапласа. Основні співвідношення.

Нехай $f(t)$ – деякий сигнал, речовий або комплексний, він визначений при $t \geq 0$ та дорівнює нулю при $t < 0$:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Перетворення Лапласа для цього сигналу це функція комплексної змінної p (комплексна частота), яка задається інтегралом

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (11.3)$$

де $f(t)$ – називають оригіналом;

$F(p)$ – зображення (образ) за Лапласом.

Інтеграл (11.3) існує при виконанні нерівності

$$|f(t)| \leq A e^{at},$$

де A, a – позитивні числа.

При виконанні цієї умови інтеграл (11.3) абсолютно сходиться для всіх комплексних чисел p , у яких $\operatorname{Re} p > a$. Число a називається абсцисою абсолютної збіжності.

Змінна p в (11.3) може бути ототожнена з комплексною частотою $p = \sigma + j\omega$. Дійсно, при чисто мнимій комплексній частоті, коли $\sigma = 0$, формула (11.3) переходить до ПФ, яке дорівнює нулю при $t = 0$. Таким чином, перетворення Лапласа (ПЛ) можна розглядати як узагальнення ПФ на випадок комплексних частот

$$\sigma = 0 \Rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

З аналогією з ПФ, існує й зворотне перетворення Лапласа (ЗПЛ)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} F(p) e^{pt} dp, \quad (11.4)$$

де C – деяка константа.

Відміна ПЛ від ПФ складається в тому, що ПЛ може застосовуватися до функцій, які не задовольняють умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Розпишемо ППЛ

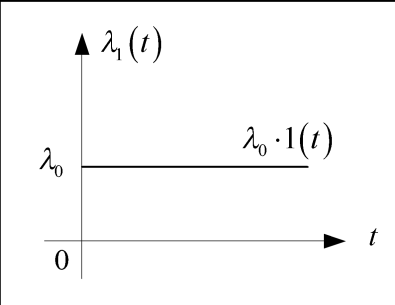
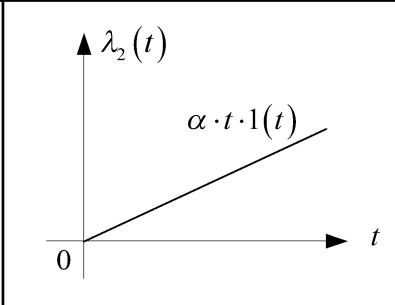
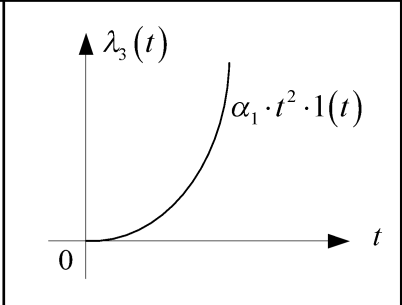
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{\xi(t)} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt = F\{\xi(t)\}$$

Тобто $F(p)$ це ППФ від деякої функції $\xi(t)$ при $t > 0$. Експонента – одна з

найбільш швидко спадаючих функцій, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)| dt < \infty$. Це означає, що такий інтеграл завжди сходиться, навіть якщо $f(t)$ є функцією, яка наростає, та не задовольняє умові збіжності.

Приклади декількох типових вхідних впливів та їх образів за Лапласом наведені у табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Оригінал			
----------	---	--	---

Образ за Лапласом	$\Lambda_1(p) = \frac{\lambda_0}{p}$	$\Lambda_2(p) = \frac{\alpha}{p^2}$	$\Lambda_3(p) = \frac{2\alpha_1}{p^3}$
Образ за Фур'є	$\Lambda_1(j\omega) = \frac{\lambda_0}{j\omega}$	$\Lambda_2(j\omega) = \frac{\alpha}{(j\omega)^2}$	$\Lambda_3(j\omega) = \frac{2\alpha_1}{(j\omega)^3}$

11.2 Властивості перетворення Лапласа

1 Лінійність

Якщо є сигнали, для яких відомі їх зображення $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, то зображення їх суми $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$, дорівнює сумі їх зображень

$$f_3(t) \leftrightarrow F_3(p) = F_1(p) + F_2(p). \quad (11.5)$$

Наприклад, використовуючи формулу Ейлера та вираз (11.5), можна записати

$$\cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}, \quad (11.6)$$

$$\sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}, \quad (11.7)$$

Тут $\sigma(t)$ – функція Хевисайда, множення на неї необхідно, що обмежити функції синус та косинус позитивною областю $t > 0$.

Роздивимося детально цей приклад.

$$\begin{aligned}
 F(p) &= L\{\cos(\omega_0 t)\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-j\omega_0 t}\} = \left|e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}\right| = \\
 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - j\omega_0}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p + j\omega_0}\right] = \frac{1}{2} \frac{p + j\omega_0 + p - j\omega_0}{(p - j\omega_0)(p + j\omega_0)} = \frac{2p}{2(p - j\omega_0)(p + j\omega_0)} = \frac{2p}{2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}.
 \end{aligned}$$

Аналогічний результат отримаємо для функції $\sin(\omega_0 t)$.