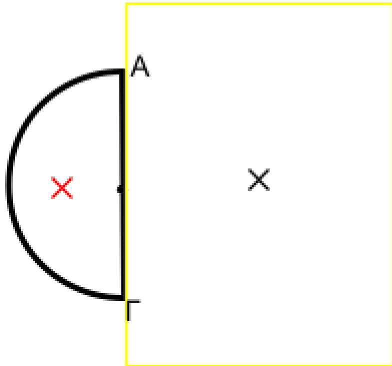
Επαγωγικά φαινόμενα σε στρεφόμενο ημικύκλιο

Ένα συρμάτινο πλαίσιο έχει σχήμα ημικυκλίου, ακτίνας $r = 1m$, με αντίσταση ανά μονάδα μήκους $R^* = 0,5\Omega/m$. Με όριο τη διάμετρο ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο με την ένταση $\vec{B}$ να είναι κάθετη στο επίπεδο του πλαισίου, έχοντας μέτρο $B = 1T$. Το πλαίσιο τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 10,28 rad/s$ κατά την αντιωρολογιακή φορά, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο Ο. Θεωρούμε το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{n}$ της επιφάνειας του πλαισίου, ομόρροπο του $\vec{B}$.



α) Να εξηγήσετε γιατί το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα.

β) Να βρείτε σε κάθε περίοδο περιστροφής του πλαισίου τη χρονική εξέλιξη της αλγεβρικής τιμής της μαγνητικής ροής, που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της μαγνητικής ροής σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες, για δύο περιόδους περιστροφής.

γ) Να βρείτε σε κάθε περίοδο περιστροφής του πλαισίου τη χρονική εξέλιξη της αλγεβρικής τιμής της έντασης του επαγωγικού ρεύματος. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της έντασης του επαγωγικού ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες, για δύο περιόδους περιστροφής και να σχεδιάσετε στο σχήμα τη φορά της στη διάμετρο ΑΓ.

δ) Το επαγωγικό ρεύμα, που διαρρέει το πλαίσιο, θα το χαρακτηρίζατε συνεχές ή εναλλασσόμενο;
Αν είναι εναλλασσόμενο θα μπορούσατε να βρείτε την ενεργό ένταση και τη θερμική ενέργεια που αναπτύσσεται στο πλαίσιο σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου;

Απάντηση

α) Καθώς το πλαίσιο στρέφεται, εισέρχεται (και εξέρχεται) στο μαγνητικό πεδίο. Τότε η διερχόμενη από το πλαίσιο μαγνητική ροή μεταβάλλεται, εξαιτίας μεταβολής του εμβαδού της - εντός πεδίου - επιφάνειας. Σύμφωνα με το νόμο Faraday, θα δημιουργηθεί ΗΕΔ επαγωγής, η οποία θα ρευματοδοτήσει το πλαίσιο.

β) Η περίοδος περιστροφής του πλαισίου είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{10,28} = 0,62s$$

Η μαγνητική ροή αυξάνεται για μισή περίοδο. Στη συνέχεια μειώνεται για άλλη μισή περίοδο.

- Από $0 \le t \le 0,31s$

Σε μια τυχαία θέση κατά την είσοδο του πλαισίου (σχήμα 1α), όταν η γωνία στροφής είναι $\theta = \omega \cdot t$, η επιφάνεια του πλαισίου που βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου θα έχει εμβαδόν

$$S_1 = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 \Leftrightarrow S_1 = \frac{\theta}{2} \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$S_1 = \frac{\omega \cdot t}{2} \cdot r^2 \quad (1)$$

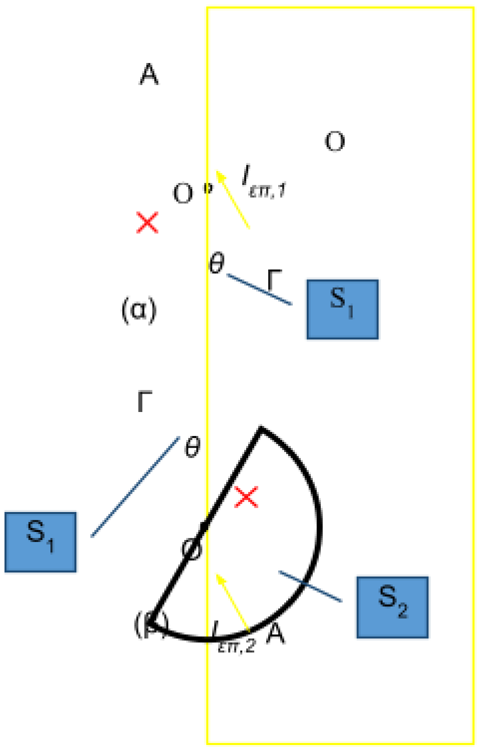
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου έχει αλγεβρική τιμή

$$\Phi_1 = B \cdot S_1 \xrightarrow{(1)} \Phi_1 = \frac{B \cdot \omega \cdot r^2}{2} \cdot t \Leftrightarrow$$

$$\Phi_1 = \frac{1 \cdot 10{,}28 \cdot 1^2}{2} \cdot t \Leftrightarrow$$

$$\Phi_1 = 5{,}14 \cdot t \quad \text{(S.I.)}$$

σχήμα 1



- Από $0{,}31s \le t \le 0{,}62s$

Σε μια τυχαία θέση κατά την έξοδο του πλαισίου (σχήμα 1β), η επιφάνεια του πλαισίου που βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου θα έχει εμβαδόν

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2} - S_1 \Leftrightarrow S_2 = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\omega \cdot (t - T/2)}{2} \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\omega \cdot t - \pi}{2} \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$S_2 = \pi r^2 - \frac{\omega \cdot t}{2} \cdot r^2 \quad (2)$$

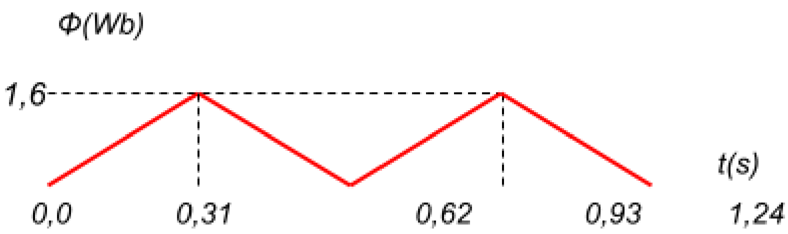
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου έχει αλγεβρική τιμή

$$\Phi_2 = B \cdot S_2 \xrightarrow{(1)} \Phi_2 = B \cdot \left(\pi r^2 - \frac{\omega \cdot t}{2} \cdot r^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Phi_2 = B \cdot \pi r^2 - \frac{B \cdot \omega \cdot r^2}{2} \cdot t \Leftrightarrow \Phi_2 = 1 \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1 \cdot 10{,}28 \cdot 1^2}{2} \cdot t \Leftrightarrow$$

$$\Phi_2 = \pi - 5{,}14 \cdot t \quad \text{(S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση θα είναι:



γ)

- Από $0s \le t \le 0,31s$

Η μεταβολή του εμβαδού είναι $\Delta S_1 = \frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2$, οπότε η μεταβολή της μαγνητικής ροής βρίσκεται:

$$\Delta \Phi_1 = B \cdot \Delta S_1 \xrightarrow{(1)} \Delta \Phi_1 = B \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2 \quad (3)$$

Παίρνουμε το νόμο Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi,1} = -\frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} \xrightarrow{(3)} E_{\varepsilon\pi,1} = -\frac{B \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2}{\Delta t} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi,1} = -B \cdot \frac{\omega}{2} \cdot r^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει

$$E_{\varepsilon\pi,1} = -1 \cdot \frac{10,28}{2} \cdot 1^2 = -5,14V$$

Η αντίσταση του πλαισίου είναι

$$R = R^* \cdot (2r + \pi r) = 0,5 \cdot (2 + 3,14 \cdot 1) = 2,57\Omega$$

Το επαγωγικό ρεύμα θα έχει σταθερή ένταση

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{-5,14}{2,57} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = -2A$$

- Από $0,31s \le t \le 0,62s$

Η μεταβολή του εμβαδού είναι $\Delta S_2 = \Delta\left(\pi r^2 - \frac{\omega \cdot t}{2} \cdot r^2\right) = \frac{-\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2$, οπότε η μεταβολή της μαγνητικής ροής βρίσκεται:

$$\Delta \Phi_2 = B \cdot \Delta S_2 \xrightarrow{(1)} \Delta \Phi_2 = -B \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2 \quad (4)$$

Παίρνουμε το νόμο Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi,2} = -\frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} \xrightarrow{(2)} E_{\varepsilon\pi,2} = -\frac{-B \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot r^2}{\Delta t} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi,2} = +B \cdot \frac{\omega}{2} \cdot r^2$$

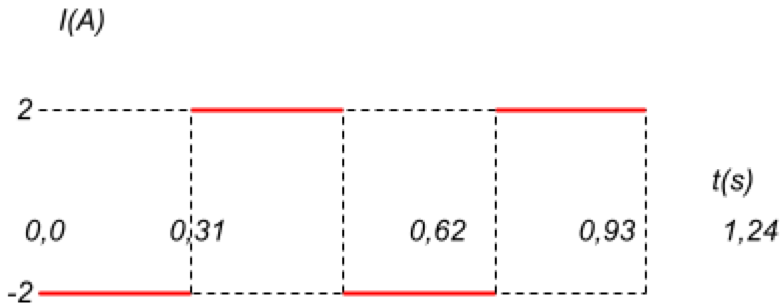
Με αντικατάσταση προκύπτει

$$E_{\varepsilon\pi} = +1 \cdot \frac{10,28}{2} \cdot 1^2 = +5,14V$$

Το επαγωγικό ρεύμα θα έχει σταθερή ένταση

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{+5,14}{2,57} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\pi} = +2A$$

Η γραφική παράσταση θα είναι:



Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα και τον κανόνα του δεξιού χεριού, η θετική φορά διαγραφής του βρόγχου είναι η ωρολογιακή. Άρα κατά την είσοδο του πλαισίου το ρεύμα είναι αρνητικό άρα θα έχει **αντιωρολογιακή** φορά (Γ→Α), ενώ κατά την έξοδο είναι θετικό, άρα θα έχει **ωρολογιακή** φορά (Α→Γ) (σχήμα 1).
Προφανώς η φορά του επαγωγικού ρεύματος μπορεί να δικαιολογηθεί και με τον κανόνα Lenz, σύμφωνα με τον οποίο, το μαγνητικό πεδίο του επαγωγικού ρεύματος πρέπει να εμποδίζει την αύξηση (κατά την είσοδο) ή τη μείωση (κατά την έξοδο) της μαγνητικής ροής από το πλαίσιο…

δ) Είναι προφανές ότι η φορά του επαγωγικού ρεύματος εναλλάσσεται ανά χρονικό διάστημα Τ/2. Άρα είναι εναλλασσόμενο ρεύμα.
Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου

$$Q_{0\to T} = Q_{0\to T/2} + Q_{T/2\to T} = I_{\varepsilon\pi,1}{}^{2}\cdot R\cdot\frac{T}{2} + I_{\varepsilon\pi,2}{}^{2}\cdot R\cdot\frac{T}{2} = I_{\varepsilon\pi}{}^{2}\cdot R\cdot T$$

Ένα συνεχές ρεύμα έντασης $I_{\varepsilon\nu}$ θα ανέπτυσσε στον ίδιο χρόνο

$$Q_{\sigma\upsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu}{}^{2}RT$$

Θέλουμε $Q_{\sigma\upsilon\nu} = Q_{0\to T} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu}{}^{2}RT = I_{\varepsilon\pi}{}^{2}\cdot R\cdot T \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \left|I_{\varepsilon\pi}\right| = 2A$

Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου

$$Q = I_{\varepsilon\nu}{}^{2}RT = 2^{2}\cdot 2{,}57\cdot 0{,}62 = 6{,}37J$$.

Σχόλιο

Η χρησιμοποίηση του εμβαδικού διανύσματος,για τον αρχικό προσανατολισμό της επιφάνειας του πλαισίου εντός του μαγνητικού πεδίου, είναι **απαραίτητη** καθώς ζητήθηκε η αλγεβρική τιμή της έντασης του επαγωγικού ρεύματος. Αν είχαμε θεωρήσει το εμβαδικό διάνυσμα με αντίθετη φορά, θα προέκυπτε αρνητική η μαγνητική ροή της α΄ημιπεριόδου και το διάγραμμα θα ήταν ανάποδα…

Ανδρέας Ριζόπουλος