

- Câu 47. [2H3-2.4-3] (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?
- A. 7. B. 5. C. 6. D. 10.

Lời giải

Chọn B.

Ta thấy A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng

$$(ABC) \text{ là } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \text{ Rõ ràng } D \in (ABC).$$

Ta cũng có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$ và $\overrightarrow{AD} = (1; -2; 0)$ nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD}$, suy ra D nằm trên đường thẳng AB .

Bởi vậy, có 5 mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là $(OAB), (OBC), (OAC), (ABC)$ và (OCD) .

- Câu 32: [2H3-2.4-3] (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA = MB = MC$.

Tính $T = a + 2b + 3c$.

- A. $T = 5$. B. $T = 3$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} M \in (P) \\ BM = AM \\ BM = CM \end{cases} & \text{ nên } \begin{cases} a + b + c - 2 = 0 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a + 2c = 4 \\ 2b + 2c = 2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ vậy } T = a + 2b + 3c = 4. \end{aligned}$$

- Câu 42. [2H3-2.4-3] (CHUYÊN KHTN-LẦN 3-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

- A. $\frac{7}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$

Gọi $N(x; y; z)$

Theo giả thiết ta có N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$ suy ra $OM = \frac{12}{ON^2} \cdot ON$

Do đó $M\left(\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

Mặt khác $M \in (ABC)$ nên $6\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2} + 3\frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2} + 2\frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2} - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$$

Do đó điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$ có tâm

$$I\left(3; \frac{3}{2}; 1\right) \text{ và bán kính } R = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{7}{2}$$

- Câu 49. [2H3-2.4-3] (SỞ GD-ĐT PHÚ THỌ-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0 + 3y_0 + z_0$ bằng
- A.** 11. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B.

Xét điểm I thỏa $2\vec{IA} - \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ suy ra $I(1; 2; -2)$.

$$2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = 2MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + IC^2$$

$2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó, đường thẳng MI có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x_0 = 1 + 3t \\ y_0 = 2 - 3t \\ z_0 = -2 + 2t \end{cases}$.

$$\text{Mà } 3x_0 - 3y_0 + 2z_0 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) + 2(-2 + 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$2x_0 + 3y_0 + z_0 = 2(1 + 3t) + 3(2 - 3t) + (-2 + 2t) = 6 - t = 5$$

- Câu 30. [2H3-2.4-3] (SỞ GD-ĐT SÓC TRĂNG-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x + y + 2z + 1 = 0$ và điểm $M(4; 2; 1)$. Khi đó điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (P) là
- A.** $M'(-4; 0; -3)$ **B.** $M'(-4; -4; -1)$ **C.** $M'(4; 2; 1)$ **D.** $M'(-2; 0; 5)$

Câu 30. [2H3-2.4-3] (SỞ GD-ĐT SÓC TRĂNG-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x + y + 2z + 1 = 0$ và điểm $M(4; 2; 1)$. Khi đó điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (P) là

- A.** $M'(-4; 0; -3)$. **B.** $M'(-4; -4; -1)$. **C.** $M'(4; 2; 1)$. **D.** $M'(-2; 0; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đường thẳng d qua M vuông góc với (P) là
$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow H(0; 1; -1)$.

M' đối xứng với M qua (P) nên H là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(-4; 0; -3)$.

Câu 19: [2H3-2.4-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 6z - 1 = 0$ và $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 0; 1)$. Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB lên (P) có độ dài bằng bao nhiêu?

- A.** $\sqrt{\frac{155}{61}}$. **B.** $\sqrt{\frac{237}{41}}$. **C.** $\sqrt{\frac{137}{41}}$. **D.** $\sqrt{\frac{255}{61}}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: A thuộc (P) nên hình chiếu của A lên (P) là điểm A .

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên (P) .

Lúc đó: Phương trình đường thẳng qua B vuông góc với (P) có dạng

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

Khi đó tạo độ điểm B' là giao điểm của d và (P) nên $B'\left(-\frac{47}{41}; -\frac{3}{41}; \frac{23}{41}\right)$

Vậy $AB' = \sqrt{\frac{237}{41}}$.

Câu 18: [2H3-2.4-3] (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA-LẦN 2-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ tâm I và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

- A.** $M(-1; 0; 4)$. **B.** $M(0; 1; 2)$. **C.** $M(3; 4; 2)$. **D.** $M(4; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$. Do $d(I;(P))=9>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (P) .

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 2; -1)$$

Phương trình đường thẳng IH là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Giao điểm của IH với (S) : $9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow M_1(3;4;2)$ và $M_2(-1;0;4)$.

$$M_1H = d(M_1;(P)) = 12, \quad M_2H = d(M_2;(P)) = 6$$

Vậy điểm cần tìm là $M(3;4;2)$.

Câu 41: [2H3-2.4-3] (THPT LÊ QUÝ ĐÔN HẢI PHÒNG-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-6=0$. Trong (P) lấy điểm M và xác định điểm N thuộc đường thẳng OM sao cho $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

B. Điểm N luôn thuộc mặt cầu có phương trình $\left(x-\frac{1}{12}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

C. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z-1=0$.

D. Điểm N luôn thuộc mặt phẳng có phương trình $x+2y+2z+1=0$.

Lời giải

Chọn B.

Vì O, M, N thẳng hàng và $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 1$ nên $OM \cdot ON = 1$, do đó $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{ON^2} \cdot \overrightarrow{ON}$.

Gọi $N(a;b;c)$, khi đó $M\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2}; \frac{b}{a^2+b^2+c^2}; \frac{c}{a^2+b^2+c^2}\right)$.

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{a}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2b}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2c}{a^2+b^2+c^2} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a}{6} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Câu 47: [2H3-2.4-3] (SGD Bắc Giang - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là

hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

A. $a+b = -\frac{1}{2}$.

B. $a+b = 2$.

C. $a+b = 0$.

D. $a+b = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(y + 2z - 1) + x + z - 2 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm với $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Suy ra (P) luôn đi qua đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

$$K \in d \Rightarrow K(2 - t; 1 - 2t; t), \quad AK(-t; -2t; t - 3)$$

Đường thẳng d có VTCP $u(-1; -2; 1)$

$$AK \cdot u = 0 \Leftrightarrow t + 4t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có $AH \leq AK \Rightarrow AH_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$.

Vậy $a + b = \frac{3}{2}$.