A. PENERAPAN INTEGRAL

I. Menghitung volume (Rumus cakram)

a. Volume benda putar yang dibatasi oleh satu kurva mengelliling sumbu x

$$V_{olume} = V = \pi \int_{x=a}^{x=b} (f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx =$$

$$L = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\, dx$$

b. Volume benda putar yang dibatasi oleh satu kurva mengelliling sumbu y

$$V = \pi \int_{y=c}^{y=d} (f = g(y))^2\, dy = \pi \int_c^d x^2\, dy =$$

c. Volume benda putar yang dibatasi oleh dua kurva mengelliling sumbu x (metode cincin)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2\, dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx =$$

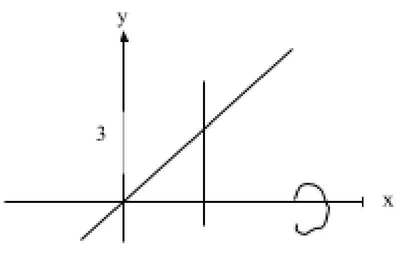
d. Volume benda putar yang dibatasi oleh dua kurva mengelliling sumbu y

$$V = \pi \int_c^d (f(y))^2 - (g(y))^2\, dy = \pi \int_c^d x_2^2 - x_1^2\, dy =$$

Contoh 1. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = x$, sumbu x dan garis $x = 3$

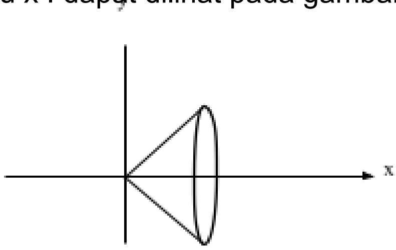
Sumber:
https://www.konsep-matematika.com/2016/03/volume-benda-putar-menggunakan-integral.html

Penyelesaian 1.
Pertama di gambarkan 1.a $y = x$ dan garis $x = 3$



Gambar 1.a kurva $y = x$ dan garis $x = 3$

Kemudian diputar pada sumbu x . dapat dilihat pada gambar 1 .b



Gambar 1 .b kurva diputar pada sumbu x

Jadi volume benda putar $y = x$ diputar pada sumbu x diputar 360º adalah

$$v = \pi\int_{0}^{3} y^{2}\, dx = \pi\int_{0}^{3} x^{2}dx = \pi[\tfrac{1}{3}x^{3}|3\ 0 = \pi\left[\tfrac{1}{3}\left(3^{3} - 0^{3}\right)\right] = \pi\left[\tfrac{27}{3}\right] = 9\pi \quad \blacksquare$$

Contoh 2. Tentukan volume dari benda putar jika daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x) = 4 - x^{2}$, sumbu x, dan sumbu y diputar 360º terhadap:

a) Terhadap sumbu x
b) terhadap sumbu y

Penyelesaian 2 :

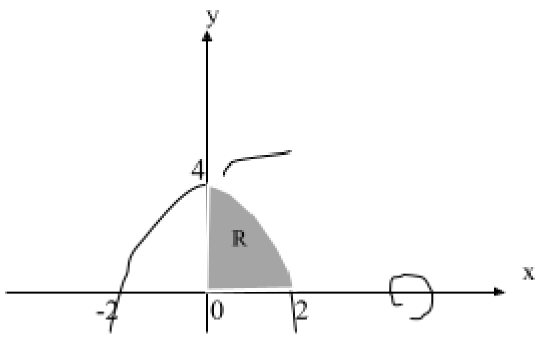
a). Cari batas nilai x pada $f(x) = 4 - x^{2}$, untuk $f(x) = 0$ diperoleh :

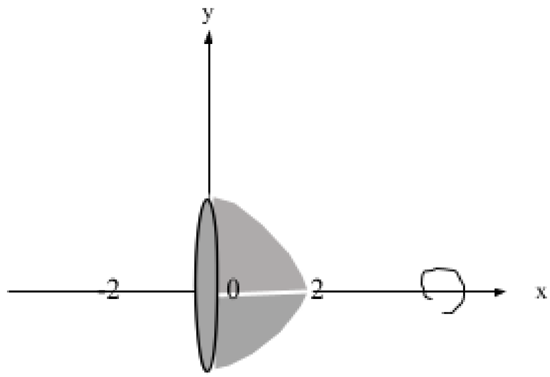
$4 - x^{2} = 0 \ => x^{2} = \pm 4 \ => x = \pm 2$,

Luas R dibatasi oleh titik (0,0) dan (0,2)

Perhatikan gambar 3 .a. b. dan c berikut ini :

Diputar pada sumbu x





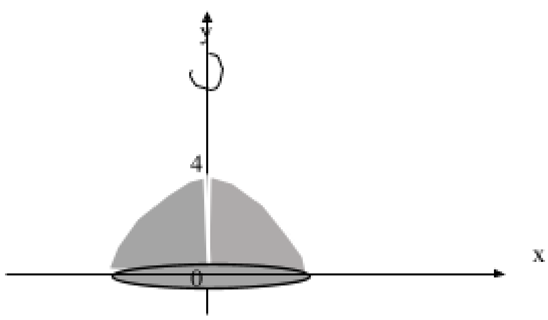
Gambar 3.a

$y = 4 - x^{2}$

Gambar 3. b

$y = 4 - x^{2}$ diputar pada sumbu x

Diputar pada sumbu y. gambar 3.c



Gambar 3.c $y = 4 - x^2$ diputar pada sumbu y

Penyelesaian gambar 3.b

Volume $y = 4 - x^2$ Diputar pada sumbu x dibatasi pada $x = 0$ dan $x = 2$

$$v = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2 (4 - x^2)^2\,dx = \pi\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)dx =$$

$$= \pi[\int_0^2 16\,dx - \int_0^2 8x^2dx + \int_0^2 x^4\,dx] = \pi[16x|2\ 0 - \frac{8}{3}x^3|2\ 0 + \frac{1}{5}x^5|2\ 0$$

$$= \pi[16(2 - 0) - \frac{8}{3}\left(2^3 - 0^3\right) + \frac{1}{5}\left(2^5 - 0^5\right) = \pi[32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}]$$

$$= \pi\left[\frac{480}{15} - \frac{320}{15} + \frac{96}{15}\right] = \frac{256}{15}\pi$$

Jadi volume benda putar diputar pada sumbu x sebesar 360^0 adalah $\frac{256}{15}\pi$ satuan volume

Penyelesaian gambar 3.c

Volume $y = 4 - x^2$ Diputar pada sumbu y dibatasi pada $y = 0$ dan $y = 4$

$x^2 = 4 - y$ jika $x = 0$ maka $y = 4$ jadi titik (0.4)

$$y = 4 - x^2 => x^2 = 4 - y$$

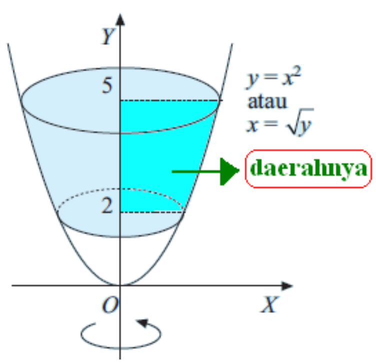
$$v = \pi\int_0^4 x^2\,dy = \pi\int_0^4 (4 - y)dy = \pi[\int_0^4 4\,dy - \int_0^4 y\,dy] = \pi(4y - \frac{1}{2}y^2)|4\ 0 = \pi[4y|4\ 0 - \frac{1}{2}y^2|4\ 0$$

$$= \pi[4(4 - 0) - \frac{1}{2}\left(4^2 - 0^2\right) = \pi[16 - 8] = 8\pi \quad \blacksquare$$

Jadi volume benda putar diputar pada sumbu y sebesar 360^0 adalah 8π satuan volume

Contoh 3. Tentukan volume benda putar yang terjadi yang dibatasi oleh sumbu y, kurva $y = x^2$. garis $y = 2$ dan garis $y = 5$ diputar pada sumbu y

Penyelesaian 3 : Perhatikan gambar 4 dibawah ini :



Gambar 4 kurva
$y = x^2$ *diputar pada sumbu y yang dibatasi* $y = 2$ *dan* $y = 5$ *yang diarsir*

Penyelesaian 3 : dari gambar 4 maka
$v = \pi\int_2^5 x^2\, dy = \pi\int_2^5 y\, dy = \pi\, [\frac{1}{2}y^2]|5\ 2 = \pi\left(\frac{1}{2}(5^2) - \frac{1}{2}\left(2^2\right) = \pi\left(\frac{25}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{21}{2}\pi\right.$

Jadi volume benda putar di putar pada sumbu y adalah $\frac{21}{2}\pi$ satuan volume

Contoh 4. Volume Benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi kurva $y = 2x - x^2$ sumbu− x, $0\leq x\leq 1$, diputar 360° mengelilingi sumbu-x adalah... satuan volume.

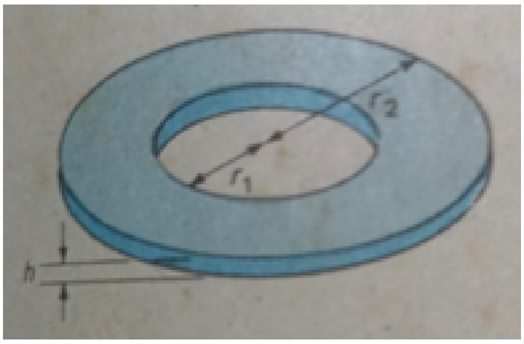
$$0 = 2x - x^2 = x(2 - x) = 0 \quad (0.0)\ dan\ (2.0)$$
$$v = \pi\int_0^2 y^2\, dx = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \text{............}$$

Contoh 5. Misalkan R adalah daerah antara sumbu x , kurva $y = x^3$, dan garis $x = 2$. Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar R mengeliling sumbu x dan sumbu y (gunakan metode cakram)

Contoh 6. Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y dan garis y=3, diputar mengeliling susmbu y. $\left(\frac{9\sqrt[3]{9}}{5}\pi\right)$

Contoh 7.
Contoh 8.

B. Metode Cicin
Sebuah benda putar dipotong-potong tegak lurus pada smbu putarnya, diperoleh sebuah cakram yang ditengah-tengahnya ada lubangnya, daerah tersebut disebut **Cicin**



$$V = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)h$$

Asumsikan bahwa $0 \le g(x) \le f(x)$ untuk $a \le x \le b$, maka rumus volume cicin adalah

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)^2 \right) - \left(g(x)^2 \right) \right] dx$$

Penjelasannya Volume yang dicari adalah selisih dari dua volume , volume $\pi \int_a^b \left(f(x)^2 \right) dx$ dari benda pejal hasil putaran yang dibentuk dengan memutar daerah di bawah $y = f(x)$ mengeliling sumbu x dan volume $\pi \int_a^b \left(g(x)^2 \right) dx$ dari benda pejal hasil putaran yang dibentuk dengan memutar daerah di bawah $y = g(x)$ mengeliling sumbu x

Berlaku untuk daerah terletak antara du kurva $x = f(y)$ dan $x = g(y)$ dan antara $y = c$ dan $y = d$, Asumsikan bahwa $0 \le g(y) \le f(y)$ untuk $a \le y \le b$

Contoh 9. Benda pejal hasil putaran yang diperoleh dengan memutar daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = 4x^2$, $x = 0$, $dan\ y = 16$ mengeliling sumbu x (kurva sebelah atas adalah $y = 16$ dan kurva sebelah bawah adalah $y = 4x^2$, maka menurut rumus cicin sebagai berikut : untuk $y = 16$ => $16 = 4x^2$ => $x^2 = \frac{16}{4}$

$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)^2 \right) - \left(g(x)^2 \right) \right] dx$$

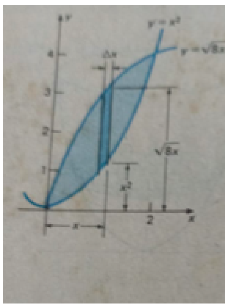
$$V = \pi \int_0^2 \left[16^2 - \left(4x^2 \right)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[256 - 16x^4 \right] dx = \pi \left(256x - \frac{16}{5} x^5 \right) |2\ 2$$

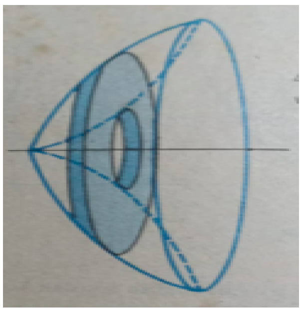
$$V = \pi \left[256(2 - 0) - \frac{16}{5} \left(2^5 - 0^5 \right) \right] = \frac{2048\pi}{5} \quad \blacksquare$$

Contoh 10. Tentukan volume benda putar apabila daerah yang dibatasi oleh parabola parabola $y = x^2\ dan\ y^2 = 8x$ diputar mengeliling sumbu $- x$

Titik potong $\left(x^2 \right)^2 = 8x$ => $x^4 - 8x = 0$ => $x\left(x^3 - 8 \right) = 0$

$$x(x - 2)\left(x^2 - 2x + 4 \right) = 0. \quad => x = 0\ dan\ x = 2$$





Gambar 6

$$V = \pi \int_0^2 \left(8x - x^4 \right) dx = \pi \left(4x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right) |2\ 0 = \frac{48\pi}{5} \quad \blacksquare$$

Contoh 11. Daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengeliling garis $x = -1$. Hitung volume benda putar

Contoh 12. Andaikan alas sebuah benda adalah suatu daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ sumbu x dan sumbu y. andaikan penampang-penampang tegak lurus pada sumbu x berbentuk bujur sangkar. Tentukan volume bend aini . ? (16/15)

C. Metode Kulit Tabung

Kulit tabung di sini maksudnya adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit (Gambar 1). Apabila jari-jari tabung dalam adalah r_1 dan jari-jari tabung luar adalah r_2, sedangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah

Dari gambar 77 di atas : volume adalah

$$V = (area\ of\ base).(height) = \left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right)h$$

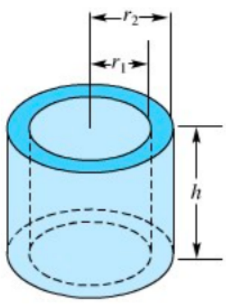
$$V = \pi\left(r_2 + r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)h = 2\pi\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)h\left(r_2 - r_1\right)$$

Dengan demikian diperoleh :

$$V = 2\pi(average\ radius).(height)(thickness)$$

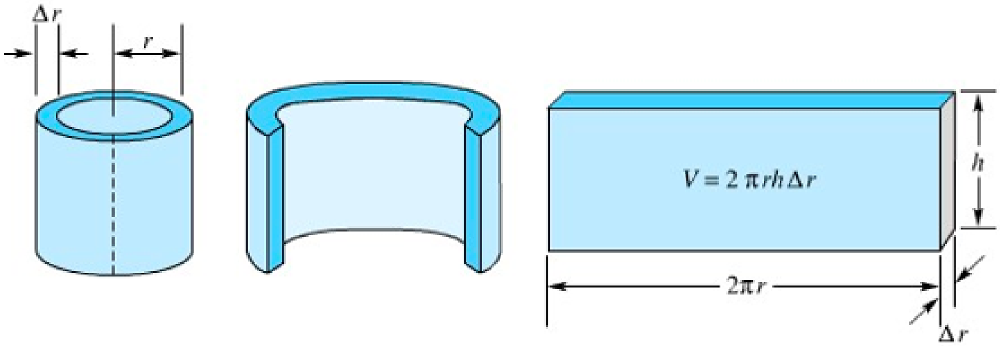
$$V = 2\pi rh.\ \Delta r$$

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi\int_a^b xy\,dx$$



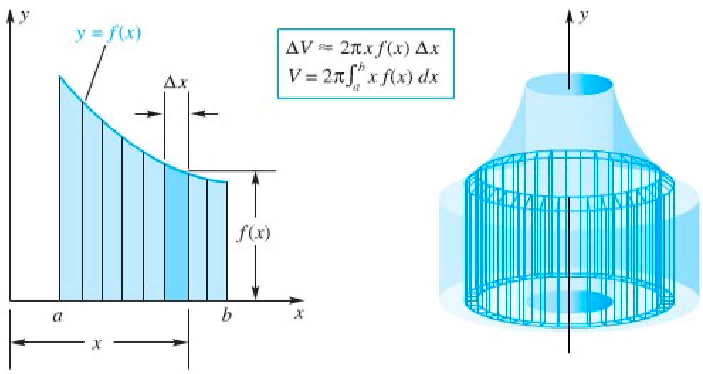
Gambar 7

Ada cara mudah untuk mengingat rumus volume di atas. Perhatikan bahwa ketika kulit tabung itu di potong sepanjang garis yang sejajar sumbu simetri dan kemudian membukanya, maka akan diperoleh selembar persegi-panjang yang memiliki ketebalan. Volume benda yang berbentuk lempeng ini dapat kita hitung (Gambar 2).



Gambar 2

Sekarang perhatikanlah sebuah daerah seperti pada Gambar 3. Apabila kita potong-potong daerah tersebut sehingga terbentuk jalur-jalur vertikal dan kemudian diputar mengelilingi sumbu y, maka akan terbentuk sebuah benda putar dan tiap jalur akan membentuk sebuah benda yang menyerupai suatu kulit tabung. Untuk memperoleh volume kulit tabung ini, kita hitung volume ΔVsesuatu kulit tabung, jumlahkan dan kemudian tarik limit jumlah ini apabila tebal kulit tabung makin menipis (menuju nol). Limit ini akan menghasilkan sebuah integral.



Gambar 3

Jika benda pejal hasil putaran yang diperoleh dengan memutar daerah R dalam kuadran pertama antara sumbu x dan kurva $y = f(x)$, terletak antara $x = a$ dan $x = b$ mengelilingi sumbu y. maka volume benda pejal diberikan : Rumus kulit tabung

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_a^b xy\, dx$$

Contoh 13. Sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sumbu x, garis $y = 1$ dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan volume benda yang terbentuk!

Penyelesaian :

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_1^4 x \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\pi [\tfrac{2}{3} x^{3/2} |4\ 1 = \frac{28\pi}{3} \quad ■$$

Contoh 14. Perhatikan daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi di atas oleh $y = x^2$, dibawa oleh $y = x^3$ dan terletak antara $x = 0.\ dan\ x = 1$, bila diputar mengeliling sumbu y , daerah ini menghasilkan daerah pejal hasil putaran yang volumenya,

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 x\left(x^2 - x^3\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)|1\ 0 = \frac{\pi}{10}$$

Contoh 15. Misalkan R adalah daerah antara sumbu x, kurva $y = x^3$ dan garis $x = 2$.

a. Tentukan volume benda perjal yang diperoleh dengan memutar sumbu R mengeliling sumbu x $(\frac{128\pi}{7})$
b. Tentukan volume benda perjal yang diperoleh dengan memutar sumbu R mengeliling sumbu y $(\frac{64\pi}{5})$

Contoh 16. Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi di atas oleh parabola $y = 2 - x^2$ dan di bawah oleh parabola $y = x^2$ mengelilini sumbu y (π)