

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

ΘΕΜΑ Β

1. (12909) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$. (Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

2. (35404) α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$. (Μονάδες 10)

3. (35044) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

4. (35043) Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

5. (34148) α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών

(i) $|2x - 3| \leq 5$ (ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9/9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

6. (14617) Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

α) Να δείξετε ότι $6 < x < 8$. (Μονάδες 12)

β) Αν ισχύει $6 < k < 8$, να δείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

(Μονάδες 13)

7. (14572) Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

β) $|2x+4| < 2$. (Μονάδες 15)

8. (14491) α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

9. (14319) Δίνεται η ανίσωση $|2x-5| < 3$

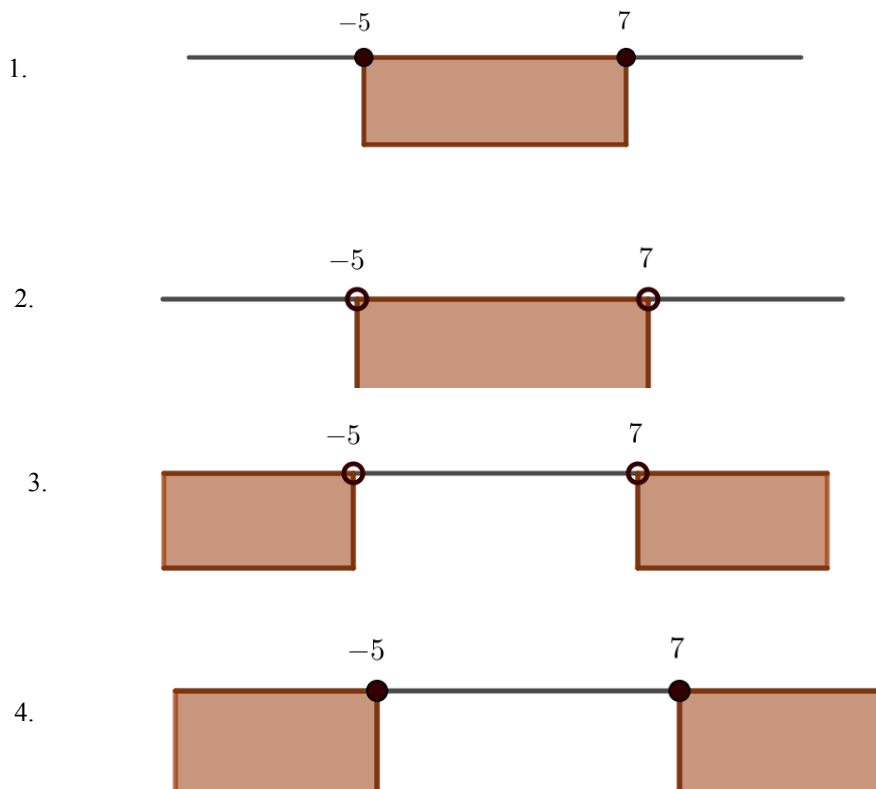
α) Να λύσετε την ανίσωση. (Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός a είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$A = \frac{1}{a}(a-5) -$. (Μονάδες 13)

10. (14295) α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να

βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

11. (13025) α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $| -x - 1 | \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

12. (37200) Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x . (Μονάδες 13)

13. (35415) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

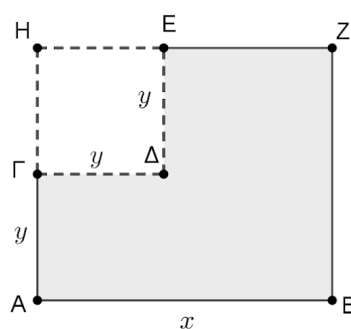
(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

14. (35549) Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

15. (36777) Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . (Μονάδες 13)

16. (36886) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$. (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. (Μονάδες 9)

17. (36888) α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 10)

18. (36893) α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$. (Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

19. (36895) α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$. (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

20. (37170) Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; (Μονάδες 8)

21. (37191) α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: (i) $|1 - 2x| < 5$ (ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9/9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

22. (37193) Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

23. (37195) Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$. (Μονάδες 12)

24. (37196) Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

25. (14753) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$$

(Μονάδες 10)

26. (35296) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

27. (36671) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή

διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

28. (13114) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$. (Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 8)

29. (13312) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)

(ii) Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

30. (13474) Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x - 1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x + 4}{2} < 0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός

$$\frac{\alpha - 4\beta}{7}$$

είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

31. (14650) α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και

να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

32. (33586) Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

(i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

(ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

33. (33893) α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

(i) Να δείξετε ότι $3x-4 > 0$. (Μονάδες 5)



(ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)

(iii) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 8)

34. (33896) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

35. (34322) Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ; (Μονάδες 4)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ; (Μονάδες 6)

γ) (i) Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή: $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$. (Μονάδες 2)

(ii) Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

(iii) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ . (Μονάδες 7)

36. (34325) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

37. (38877) Στο χάντμπολ κάθε ομάδα μπορεί να πετύχει 1 γκολ σε κάθε επίθεση και ένας αγώνας μπορεί να λήξει ισόπαλος, όπως στο ποδόσφαιρο. Η ομάδα χάντμπολ Αιακός στην προπόνηση εξασκείται στο σύστημα επίθεσης «κόντρα από ένα», με το οποίο, αν πετύχει, βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ της ομάδας.

α) Ο Αιακός δίνει αγώνα με την ομάδα Πέλοπας. Οκτώ λεπτά πριν από τη λήξη του αγώνα βρίσκεται πίσω από τον Πέλοπα με 22-18. Ο προπονητής του Αιακού σκέφτεται να ζητήσει από τους παίκτες του την εφαρμογή της «κόντρας από ένα» σε όλες τις επιθέσεις που μένουν μέχρι το τέλος του αγώνα.

Από τα στατιστικά των προηγούμενων αγώνων έχει προκύψει ότι:

Στο 50% των επιθέσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.

Στο 80% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

(i) Να αποδείξετε ότι στα $\frac{2}{5}$ συνόλου των επιθέσεων του Αιακού με το σύστημα «κόντρα από ένα», ο δεξιός σουτέρ πετυχαίνει γκολ.

(Μονάδες 7)

(ii) Αν μέχρι το τέλος του αγώνα ο Αιακός κάνει ακόμα 10 επιθέσεις, τότε, βάσει των στατιστικών, σε πόσες από αυτές εκτιμάτε ότι θα βρεθεί σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ και πόσα γκολ θα πετύχει ο Αιακός; (Μονάδες 6)

(iii) Μπορεί ο Αιακός να πετύχει νίκη σε αυτό τον αγώνα, κάνοντας 10 επιθέσεις με το σύστημα «κόντρα από ένα»;

(Μονάδες 4)

β) Την επόμενη αγωνιστική περίοδο, με σκληρή προπόνηση, ο Αιακός κατάφερε να βελτιώσει τα στατιστικά του, στο «κόντρα από ένα»:

Στο 80% των περιπτώσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.

Στο 90% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

Αν βρεθεί πάλι να χάνει με 4 γκολ 8 λεπτά πριν από τη λήξη ενός αγώνα, σε πόσες επιθέσεις μπορεί να ανατρέψει το αποτέλεσμα με το «κόντρα από ένα», αν δεν δεχτεί άλλο γκολ;

(Μονάδες 8)

38. **(38875)** Σε ένα τηλεπαιχνίδι ερωτήσεων κάθε παίκτης ή παίκτρια απαντάει ερωτήσεις τη μία μετά την άλλη και συγκεντρώνει βαθμούς. Σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού:

Κερδίζει 10 βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση

Χάνει 3 βαθμούς για κάθε λανθασμένη απάντηση.

Αν δεν απαντήσει καθόλου σε κάποια ερώτηση, δεν κερδίζει ούτε χάνει βαθμούς.

Σταματάει να παίζει και χάνει, όταν η βαθμολογία του γίνει αρνητική.

Ο μέγιστος αριθμός ερωτήσεων που μπορεί να απαντήσει είναι 30.

α) Μια παίκτρια έχει απαντήσει μέχρι στιγμής σε 5 ερωτήσεις, σωστά σε 3 και λάθος σε 2.

i. Ποια είναι η μεγαλύτερη βαθμολογία στην οποία μπορεί φτάσει μέχρι το τέλος; (Μονάδες 5)

ii. Αν απαντήσει σωστά σε x ακόμα ερωτήσεις και λάθος στις υπόλοιπες, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι η τελική βαθμολογία της δίνεται από τη σχέση: $13x - 51$.

(Μονάδες 7)

iii. Αν απαντήσει σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις είτε σωστά είτε λάθος, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να πάρει λιγότερο από 1 βαθμό. (Μονάδες 5)

β) Ένας παίκτης σκέφτηκε να ακολουθήσει μία από τις δύο στρατηγικές:

1η στρατηγική: Να απαντάει μόνο τις ερωτήσεις των οποίων γνωρίζει με βεβαιότητα τις σωστές απαντήσεις.

2η στρατηγική: Να απαντάει όλες τις ερωτήσεις ανεξάρτητα από το αν γνωρίζει τις σωστές απαντήσεις ή όχι.

Τελικά επέλεξε στρατηγική και απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις του παιχνιδιού, χωρίς να χάσει.

i. Σύμφωνα με τη δεύτερη στρατηγική: Αν σ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων για τις οποίες ήταν σίγουρος και πράγματι απάντησε σωστά και χ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσε χωρίς να είναι

σίγουρος, να αποδείξετε ότι η βαθμολογία του δίνεται από τον τύπο $13x + 13\sigma - 90$, με $0 \leq x \leq 30 - \sigma$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν γνώριζε τις σωστές απαντήσεις σε 4 από τις 30 ερωτήσεις και ακολούθησε τη δεύτερη στρατηγική, σε πόσες από τις τυχαία απαντημένες ερωτήσεις θα πρέπει να πέτυχε τη σωστή απάντηση, ώστε να θεωρήσουμε επιτυχή την επιλογή στρατηγικής;

(Μονάδες 3)

39. **(38874)** Σε ένα γραπτό τεστ γνώσεων η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 και η ελάχιστη είναι 0. Το τεστ αποτελείται από 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει μοναδική σωστή απάντηση. Το τεστ βαθμολογείται ως εξής: κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε 5 μονάδες και υπάρχει «αρνητική βαθμολογία» 0,5 μονάδα, δηλαδή αφαιρείται 0,5 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Επίσης, αν σε κάποια ερώτηση δεν δοθεί καμία απάντηση, αυτή δεν βαθμολογείται. Πλήρως απαντημένο θεωρείται ένα τεστ, του οποίου έχουν απαντηθεί όλες οι ερωτήσεις, είτε σωστά είτε λανθασμένα.

α) Πόσους βαθμούς θα πάρει ένα πλήρως απαντημένο τεστ με δύο σωστές απαντήσεις; (Μονάδες 5)

β) (i) Ένα πλήρως απαντημένο τεστ πήρε 0. Να αποδείξετε ότι είχε το πολύ μία σωστή απάντηση. (Μονάδες 10)

(ii) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός πλήρως απαντημένου τεστ, με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, είναι $5,5x - 10$, όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

(Μονάδες 5)

(iii) Ένα τεστ βαθμολογήθηκε με 84. Ήταν το τεστ πλήρως απαντημένο; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας. (Μονάδες 5)

40. **(38864)** Μια εταιρεία κατασκευάζει μετρητές αποστάσεων με χρήση Laser. Για να ξεκινήσει την παραγωγή ενός νέου μετρητή, πρέπει το σφάλμα μέτρησης $|x - x_\alpha|$, όπου x_α είναι η πραγματική απόσταση και x το αποτέλεσμα της μέτρησης με τη νέα συσκευή, να είναι το πολύ μέχρι το 1% της πραγματικής απόστασης x_α .

α) Αν στις δοκιμές που έκανε η εταιρεία, η πραγματική απόσταση ήταν $x_\alpha = 200\text{ m}$, ποιες τιμές της μέτρησης x είναι αποδεκτές; (Μονάδες 5)

β)(i) Να δείξετε ότι γενικότερα οι τιμές x της μέτρησης με τον μετρητή μπορεί να είναι από $0,99x_\alpha$ μέχρι και $1,01x_\alpha$, δηλαδή ότι ισχύει $0,99x_\alpha \leq x \leq 1,01x_\alpha$. (Μονάδες 4)

(ii) Να αποδείξετε ότι δύο μετρήσεις της ίδιας πραγματικής απόστασης x_α μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους το πολύ κατά $0,02x_\alpha$. (Μονάδες 3)

(iii) Μέχρι ποια απόσταση x_α , οι διάφορες μετρήσεις x που μπορεί να δώσει ο μετρητής για αυτή, δεν μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους περισσότερο από $0,5\text{ m}$; (Μονάδες 6)

γ) Αν η τιμή που δίνει ο μετρητής είναι $x = 150\text{ m}$, ποιες είναι οι πιθανές τιμές x_α της πραγματικής απόστασης;

(Δίνεται ότι $\frac{150}{1,01} \approx 148,51$ και $\frac{150}{0,99} \approx 151,51$) (Μονάδες 7)

41. **(38848)** Η αιθανόλη, κοινώς οινόπνευμα ή αλκοόλ, είναι μία χημική ένωση που χρησιμοποιείται στην αντισηψία και στην αρωματοποίηση. Ένα υγρό καθαριστικό χεριών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό, όταν περιέχει αιθανόλη κατά περισσότερο από 30%. Στην αρωματοποίηση η αιθανόλη χρησιμοποιείται ως βάση για τα αρώματα μαζί με αιθέρια έλαια. Το ποσοστό συμμετοχής της αιθανόλης σε ένα άρωμα είναι συνήθως μεγαλύτερο του 70%.

α) Η Μαρία εργάζεται στην παραγωγή καθαριστικών χεριών. Σε ένα δοχείο περιέχονται 500 ml ενός υγρού καθαριστικού χεριών με 20% αιθανόλη.

i. Πόσα ml αιθανόλης περιέχει το υγρό καθαριστικό;

(Μονάδες 2)

ii. Η Μαρία σκέφτεται ότι «εάν στο καθαριστικό χεριών προσθέσουμε αιθανόλη, ώστε να διπλασιαστεί η ποσότητά της, τότε θα διπλασιαστεί και το ποσοστό της αιθανόλης που περιέχει το καθαριστικό». Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τη σκέψη της Μαρίας; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.

(Μονάδες 5)

iii. Πόσα ml αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε το ποσοστό της αιθανόλης να είναι 45%;

(Μονάδες 5)

iv. Πόσα τουλάχιστον ml αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό χεριών;

(Μονάδες 6)

β) Η Σοφία έφτιαξε μόνη της ένα άρωμα 150ml χρησιμοποιώντας 80% αιθανόλη και αιθέρια έλαια. Επειδή της φάνηκε βαρύ, αποφάσισε να αγοράσει επιπλέον αιθανόλη, για να το αραιώσει έτσι, ώστε η περιεκτικότητα του αραιωμένου αρώματος σε αιθέρια έλαια να είναι 15%. Πόσα ml αιθανόλης πρέπει να αγοράσει επιπλέον; (Μονάδες 7)

42. (38847) Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν ηλεκτρικά μέρη συσκευών, όπως οι αντιστάτες και οι πυκνωτές, περιγράφεται από τιμές (αντίσταση, χωρητικότητα κ.λπ.) που αναφέρονται από τον κατασκευαστή, δηλαδή το εργοστάσιο. Στην πράξη, όμως, οι τιμές αυτές μπορεί να διαφέρουν, λόγω μικροδιαφορών κατά την κατασκευή.

α) Ένας κατασκευαστής, που παράγει ένα είδος αντιστάτη, καθορίζει την τιμή της αντίστασής του στα 680Ω (Ohm) και εγγυάται ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις στην κατασκευή δεν υπερβαίνουν το 5% της τιμής αυτής.

i. Αν R είναι η πραγματική τιμή της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη, να αιτιολογήσετε ότι η σχέση που αποδίδει μαθηματικά την παραπάνω κατάσταση είναι $d(R, 680) \leq 34$ ή αλλιώς $|R - 680| \leq 34$. (Μονάδες 5)

ii. Μπορεί η πραγματική τιμή R της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη να είναι 715Ω; Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση του ερωτήματος (i) ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο, για να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

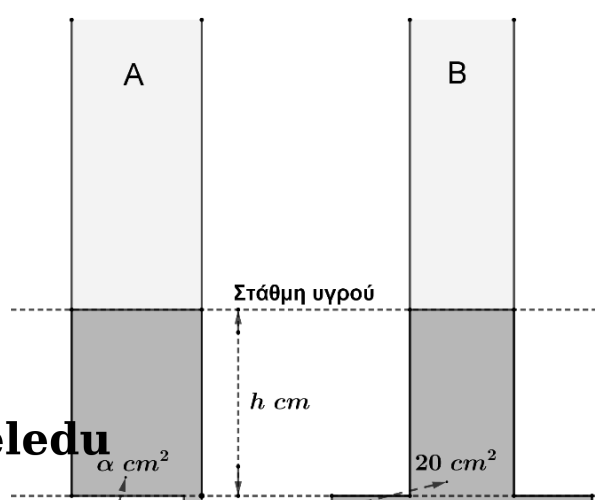
iii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη πραγματική τιμή R της αντίστασης αυτού του αντιστάτη. (Μονάδες 5)

β) Ο ίδιος κατασκευαστής, ύστερα από μια αλλαγή στον τρόπο παραγωγής, παρατηρεί ότι οι πραγματικές τιμές των αντιστατών που τώρα παράγει κυμαίνονται μεταξύ 650Ω και 670Ω. Έτσι χρειάζεται να καθορίσει νέα τιμή για την αντίσταση αυτού του είδους αντιστάτη.

i. Να προτείνετε μία νέα τιμή που ο κατασκευαστής μπορεί να καθορίσει για την αντίσταση του συγκεκριμένου αντιστάτη. (Μονάδες 2)

ii. Με βάση την τιμή που προτείνετε, να βρείτε το ποσοστό της τιμής για το οποίο ο κατασκευαστής μπορεί να εγγυηθεί ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις δεν θα υπερβαίνουν αυτό το ποσοστό. (Μονάδες 8)

43. (38843) Για να γίνει ένα πείραμα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο συγκοινωνούντα δοχεία, τα οποία συνδέονται μέσω ενός μικρού σωλήνα που περιέχει υγρό αμελητέου όγκου. Το δοχείο B αποτελείται από δύο μέρη. Το κάτω μέρος έχει συνολικό όγκο 100 cm^3 , ενώ στη συνέχεια είναι κυλινδρικό με εμβαδόν βάσης



Teledu

20 cm^2 . Το δοχείο Α έχει κυλινδρικό σχήμα και εμβαδόν βάσης $\alpha \text{ cm}^2$. Επίσης, το δοχείο Α είναι τοποθετημένο πιο ψηλά, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(Δίνεται ότι σε ένα κυλινδρικό δοχείο ισχύει Όγκος = Εμβαδόν βάσης $\times$ Ύψος)

α) Να υπολογίσετε τον όγκο του υγρού στο δοχείο Β, αν $h = 5 \text{ cm}$. (Μονάδες 2)

Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τον όγκο V_B του υγρού στο δοχείο Β ως συνάρτηση του ύψους h . Να κάνετε το ίδιο για τον όγκο V_A του υγρού στο δοχείο Α. (Μονάδες 4)

β) Ιδανικά, για να πετύχει το πείραμα, πρέπει τα δύο δοχεία να γεμίσουν τόσο, ώστε να περιέχουν τον ίδιο όγκο υγρού. Για το δοχείο Α έχουμε στη διάθεσή μας διάφορες επιλογές όσον αφορά το εμβαδόν της βάσης του. Τρεις από αυτές είναι οι ακόλουθες: Α. $\alpha = 10 \text{ cm}^2$ Β. $\alpha = 20 \text{ cm}^2$ Γ. $\alpha = 40 \text{ cm}^2$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί/ούν κάποια/ες από αυτές; Να εξηγήσετε γιατί. (Μονάδες 7)

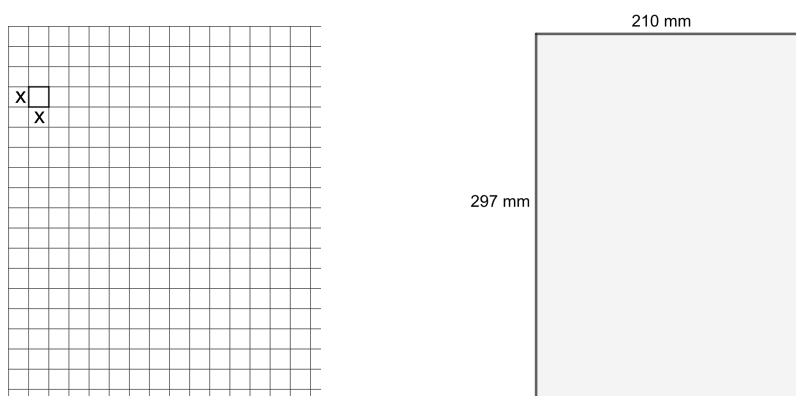
γ) Τελικά για δοχείο Α επιλέχθηκε ένα με εμβαδόν βάσης 30 cm^2 .

Αν και το ιδανικό είναι τα δύο δοχεία να περιέχουν τον ίδιο όγκο, το πείραμα μπορεί να γίνει με σχετική επιτυχία όσο η διαφορά ανάμεσα στους όγκους των δύο δοχείων είναι το πολύ 10 cm^3 .

(i) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος h ; (Μονάδες 6)

(ii) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος h , αν επιπλέον ο συνολικός όγκος στα δύο δοχεία δεν μπορεί να ξεπερνά τα 600 cm^3 ; (Μονάδες 6)

44. (38841) Μια βιοτεχνία κατασκευής τετραδίων παράγει τετράδια που η κάθε σελίδα τους είναι γεμάτη με τετραγωνάκια, όπως στο σχήμα (το λεγόμενο τετράδιο «καρέ»). Με x συμβολίζουμε το μήκος της πλευράς κάθε τετραγώνου.



Οι διαστάσεις κάθε σελίδας του τετραδίου είναι 210 mm επί 297 mm . Στο τέλος της σελίδας του τετραδίου (κάτω και δεξιά) ενδέχεται τα τετράγωνα να εμφανίζονται κομμένα λόγω των διαστάσεών τους (δηλαδή να μη χωράνε ολόκληρα).

α) Αν κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά με μήκος $x = 8 \text{ mm}$, πόσα ολόκληρα τετραγωνάκια χωράνε οριζόντια σε κάθε γραμμή της σελίδας; (Μονάδες 4)

β) Αν σε κάθε στήλη χωράνε 37 ολόκληρα τετραγωνάκια, να αποδείξετε ότι: i. $38x > 297$. (Μονάδες 6)

ii. Το μήκος της πλευράς του κάθε τετραγώνου είναι το πολύ ίσο με $\frac{297}{37} \text{ mm}$. (Μονάδες 6)

iii. $\frac{297}{38} < x \leq \frac{297}{37}$.

(Μονάδες 3)

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος x της πλευράς κάθε τετραγώνου, αν κάθε γραμμή της σελίδας του τετραδίου χωράει 23 ολόκληρα τετραγωνάκια και η κάθε του στήλη χωράει 33 ολόκληρα τετραγωνάκια; (Μονάδες 6)

Δίνονται: $\frac{210}{23} \cong 9, 23, \quad \frac{297}{34} \cong 8, 74$

45. **(38816)** Το φετινό πανελλήνιο πρωτάθλημα ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού διεξάγεται σε 10 φάσεις. Σε κάθε φάση όλοι οι συμμετέχοντες αντιμετωπίζουν άλλους συμμετέχοντες ύστερα από κλήρωση. Σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν από 2 έως 12 παίκτες και υπάρχει 1 νικητής. Η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας προκύπτει από τον υπολογισμό: (φάση πρωταθλήματος) · (ηττημένοι παρτίδας) + 1. 200.

Για παράδειγμα, ο νικητής μιας παρτίδας 11 παικτών στη 2η φάση του πρωταθλήματος κερδίζει 1220 βαθμούς.

α) Η Μαρία κέρδισε μια παρτίδα 9 παικτών στην 3η φάση του πρωταθλήματος και μια παρτίδα 7 παικτών στην 5η φάση του πρωταθλήματος. Πόσους βαθμούς κέρδισε συνολικά για αυτές τις νίκες της; (Μονάδες 5)

β) Στο προηγούμενο πανελλήνιο πρωτάθλημα η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας υπολογιζόταν ως εξής:

$$\text{Βαθμοί} = (\text{ηττημένοι παρτίδας}) \cdot (\text{διάρκεια παρτίδας σε λεπτά} - 100) + 800.$$

Και πέρσι ίσχυε ότι σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν μέχρι 12 παίκτες, αλλά ανακηρύσσεται ένας νικητής.

Ο Θρασύβουλος στο προηγούμενο πρωτάθλημα κέρδισε 400 βαθμούς με μία μόνο νίκη.

Αν t είναι η διάρκεια, σε λεπτά, της παρτίδας που κέρδισε ο Θρασύβουλος και x το πλήθος των ηττημένων της παρτίδας,

i. Να αποδείξετε ότι $t = 100 - \frac{400}{x}$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι αληθής η ανισότητα $100 - \frac{400}{x} > 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

iii. Πόσοι μπορεί να ήταν οι αντίπαλοι που κέρδισε ο Θρασύβουλος; Να εξηγήσετε το συμπέρασμά σας. (Μονάδες 5)

iv. Αν ο Θρασύβουλος ήταν ο νικητής της ίδιας ακριβώς παρτίδας αλλά στην τελευταία φάση του φετινού πρωταθλήματος, θα μπορούσε να κερδίσει 1. 240 βαθμούς; (Μονάδες 5)

46. **(38809)** Δύο μοτοσυκλέτες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις στην Εγνατία οδό. Η μία ξεκινά από την Καβάλα με σταθερή ταχύτητα 120km/h και η άλλη ξεκινά ταυτόχρονα από τα Ιωάννινα με σταθερή ταχύτητα 100km/h . Η Καβάλα απέχει 407 χιλιόμετρα από τα Ιωάννινα.



Οι αναβάτες θέλουν να μπορούν να συνεννοηθούν. Για τον λόγο αυτό είναι εξοπλισμένοι με ασύρματους ενδοεπικοινωνίας, αλλά πρέπει να είναι σε απόσταση το πολύ 10 χιλιομέτρων η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για να μπορούν να έρθουν σε επαφή. Αν t είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την αρχή του ταξιδιού:

α) Πώς εκφράζεται η απόσταση που έχει κάθε μοτοσυκλέτα από την Καβάλα ως συνάρτηση του χρόνου t ; (Μονάδες 6)

β) Πότε θα μπορέσουν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους οι αναβάτες; (Μονάδες 8)

γ) Πότε θα διασταυρωθούν και πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει κάθε μοτοσυκλέτα; (Μονάδες 7)

δ) Μετά τη διασταύρωσή τους και καθώς θα απομακρύνεται η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για πόσο χρόνο ακόμα θα μπορούν να επικοινωνούν οι αναβάτες χρησιμοποιώντας τους ασυρμάτους; (Μονάδες 4)

Δίνεται ότι: $417 \div 220 \cong 1, 9$ και $397 \div 220 \cong 1, 8$

47. **(38807)** Η καρδιά στον άνθρωπο χτυπά περισσότερο από 100.000 φορές την ημέρα. Κάθε φορά που χτυπά, διώχνει μια ποσότητα αίματος στις αρτηρίες, η οποία αυξάνει την πίεση. Η συστολική πίεση είναι η πίεση

που ασκεί το αίμα στο τοίχωμα των αρτηριών, καθώς φεύγει από την καρδιά, ενώ η διαστολική πίεση είναι η πίεση που ασκεί το αίμα στα τοιχώματα των αρτηριών, όταν η καρδιά ηρεμεί.

Οι φυσιολογικές τιμές της αρτηριακής πίεσης για τους ενήλικες είναι για τη διαστολική (p) μεταξύ 60 έως και 80 $mmHg$ και για τη συστολική (P) μεταξύ 90 έως και 120 $mmHg$ (χιλιοστά της στήλης του υδραργύρου). Η μέτρηση της αρτηριακής πίεσης γίνεται με δυο τρόπους: με άμεση μέτρηση, μια διαδικασία επεμβατική που γίνεται μόνο στο νοσοκομείο, και με έμμεση μέτρηση, που γίνεται με χρήση ενός κοινού πιεσόμετρου στο σπίτι ή στο φαρμακείο. Η άμεση μέτρηση δείχνει την πραγματική πίεση και έχει κάποια απόκλιση από τη μέτρηση με το πιεσόμετρο. Έχουμε ένα ηλεκτρονικό πιεσόμετρο, που ξέρουμε ότι δίνει τιμές μετρήσεων μικρότερες κατά 4 $mmHg$ από τις πραγματικές.

α) Για κάθε ένα από τα δύο είδη πίεσης (συστολική και διαστολική), να βρείτε μια σχέση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την άμεση τιμή της πίεσης, όταν γνωρίζουμε την έμμεση πίεση. (Μονάδες 6)

β) Οι μετρήσεις που μας δίνει το πιεσόμετρο είναι P'/p' $mmHg$. Θεωρούμε πως ένας ασθενής έχει υπόταση, αν η αρτηριακή του πίεση είναι κάτω από 90/60 $mmHg$, και υπέρταση, όταν η αρτηριακή του πίεση είναι πάνω από 140/90 $mmHg$ σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Αν μετράμε την πίεση με πιεσόμετρο, ποιες τιμές ορίζουν αν έχουμε υπόταση ή υπέρταση; (Μονάδες 8)

γ) Το εύρος παλμών είναι η διαφορά μεταξύ της συστολικής (P) και της διαστολικής (p) αρτηριακής πίεσης. Ένα φυσιολογικό εύρος παλμών κυμαίνεται μεταξύ 40 και 60 $mmHg$.

Ένα άτομο μετράει με το πιεσόμετρο και έχει αρτηριακή πίεση: P'/p' $mmHg$. Να γράψετε μια ανίσωση που δείχνει ότι το εύρος παλμών του είναι μεταξύ 40 και 60 $mmHg$.

(Μονάδες 5)

Αν γνωρίζουμε ότι η διαστολική πίεση p' ενός ατόμου είναι 80 $mmHg$, ποιο εύρος τιμών μπορεί να έχει η συστολική του πίεση P' , ώστε το εύρος παλμών του να παραμένει φυσιολογικό; (Μονάδες 6)

48. (38927) Το ενεχυροδανειστήριο είναι γραφείο, το οποίο, κυρίως, είτε χορηγεί έντοκα δάνεια που εξασφαλίζονται με ενέχυρο πολύτιμα αντικείμενα (δηλαδή κατακρατά πολύτιμα αντικείμενα μέχρι την αποπληρωμή του δανείου, οπότε τα επιστρέφει) είτε αγοράζει τέτοια αντικείμενα. Τα κοσμήματα είναι ανάμεσα στα αντικείμενα που ενδιαφέρουν ένα ενεχυροδανειστήριο. Τα κύρια κριτήρια για την εκτίμηση της αξίας ενός χρυσού κοσμήματος είναι η καθαρότητα του χρυσού και το βάρος του κοσμήματος.

α) Η καθαρότητα του χρυσού μετριέται σε καράτια, που δείχνουν τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων από το οποίο φτιάχνουμε ένα χρυσό κόσμημα. Για παράδειγμα, σε ένα χρυσό κόσμημα 24 καρατίων, τα $\frac{24}{24}$ ή αλλιώς το 100% είναι καθαρός χρυσός. Να βρείτε το ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα χρυσό κόσμημα 18 καρατίων, σε ένα 14 καρατίων και σε ένα 9 καρατίων. (Μονάδες 6)

β) Το ενεχυροδανειστήριο «Golden Market» προσφέρει δάνειο, με ενέχυρο χρυσά κοσμήματα. Το δάνειο είναι ίσο με το μισό της αξίας των κοσμημάτων με ετήσιο επιτόκιο 6%, ενώ τα έξοδα φύλαξης είναι 100 ευρώ και τα έξοδα φακέλου 80 ευρώ. Η Ρέα έχει χρυσά κοσμήματα αξίας 5.000 ευρώ και τα αφήνει ως ενέχυρο για δάνειο ενός μήνα. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει η Ρέα στο «Golden Market» στο τέλος του μήνα; (Μονάδες 9)

γ) Το «Golden Market» αγοράζει κοσμήματα με την τρέχουσα τιμή χρυσού, αφαιρώντας (για τόκους και προμήθειες) 24% από την τιμή αγοράς. Η τρέχουσα τιμή χρυσού ανά γραμμάριο ενός κοσμήματος καθορίζεται με βάση το ποσοστό του χρυσού στο κόσμημα: για ένα κόσμημα 9 καρατίων είναι 35 ευρώ/γραμμάριο και για ένα κόσμημα 14 καρατίων είναι 55 ευρώ/γραμμάριο. Η Αθηνά μπορεί να διαθέσει στο ενεχυροδανειστήριο ένα κόσμημα 9 καρατίων ή ένα κόσμημα 14 καρατίων, προκειμένου να πάρει από την πώληση τουλάχιστον 2.660

ευρώ. Πόσο πρέπει να ζυγίζει το κάθε κόσμημα, για να πάρει η Αθηνά το ποσό που χρειάζεται διαθέτοντας μόνο ένα από αυτά;

(Μονάδες 10)