

Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів.

1. **Скалярним добутком векторів** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

Якщо вектори задані своїми координатами: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$:

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

2. **Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$** називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\vec{a} \times \vec{b}$. За визначенням випливає, що $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{mp} = \frac{1}{2} S_{nap} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Векторний добуток векторів, які задані своїми координатами, обчислюються за формулою:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \quad (\text{або} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}).$$

Векторні добутки ортів дорівнюють:

$$\begin{array}{lll} \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; & \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; & \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}; \\ \bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}; & \bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}; & \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}. \end{array}$$

3. Мішаним добутком трьох векторів називається добуток $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.
Частіше мішаний добуток позначається $\overline{abc}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеду, який побудований на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{nap} = |\overline{abc}|.$$

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} |\overline{abc}|.$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\overline{abc} = 0$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\vec{a}(-1; 0; 4)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$.
Тоді скалярний добуток дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})$ та $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$.
Знайдемо ці вектори:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 5\vec{j} - 5\vec{k}; \\ \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = (0; 5; -5); \\ \vec{d} &= \vec{a} - \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) - (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}; \\ \vec{d} &= \vec{a} - \vec{b} = (2; -1; 3).\end{aligned}$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-5 - 15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 7} = \\ &= -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}; \\ \cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) &= \arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).\end{aligned}$$

Задача 3. Задано вектори $\vec{a} = 12\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
Обчислити проекцію вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на вектор $\vec{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\vec{b} + \vec{c} = (1 + 1; 2 - 3; 4 - 2)$;
 $\vec{b} + \vec{c} = (2; -1; 2)$ та $\vec{c} = (12; -3; -3)$.

Обчислимо проекцію $(\vec{b} + \vec{c})$ на вектор $\vec{a}$ за формулою:

$$pr_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2 \cdot 12 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{24 + 3 - 6}{\sqrt{144 + 9 + 9}} = \frac{21}{\sqrt{162}} = \frac{21}{9\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$