

國立高師大附中106學年度第二學期高一數學科第一次期中考試題

(考試時間:80分鐘, 應考班級:高一仁~和)

1、 單選題:(每題5分, 共10分。每題答對得5分, 答錯得0分, 未作答不給分。)

1. 小龍年初向銀行借118萬元, 年利率 6% , 採複利計算, 若小龍預計在每年年底還本息一次, 且每次還的款項相等, 8年還清, 請問小龍每次要還多少元? (已知 $(1.06)^7 \approx 1.50$, $(1.06)^8 \approx 1.59$, $(1.06)^9 \approx 1.69$)

(1)168000元 (2)180000元 (3)188800元 (4)189800元 (5)190800元

2. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求, 才有資格參選模範生。

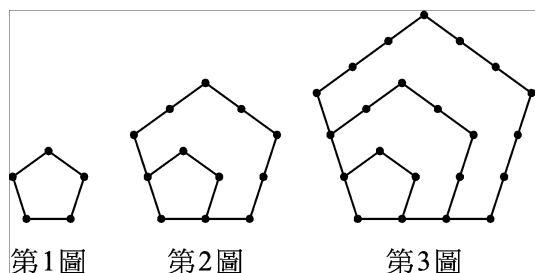
一、國文成績或英文成績 70 分 (含) 以上; 二、數學成績及格。

已知小文上學期英文 58 分而且他不符合參選模範生資格, 請問下列哪一個選項的推論是正確的? (1)小文的國文成績未達 70 分 (2)小文的數學成績不及格 (3)小文的國文成績 70 分以上但數學成績不及格 (4)小文的國文成績未達 70 分或數學成績不及格 (5)小文的國文成績未達 70 分且數學成績不及格

2、 多重選擇題:(每題8分, 共32分。每題全對得8分, 只錯一個選項可得5分, 錯兩個選項可得2分, 錯超過兩個選項或未作答不給分。)

1. 設 $\{a_n\}$ 是一個公比為負數的等比數列, 其中 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, $a_2 - a_5 = -54$, 請選出正確的選項? (1) $a_1 = 2$ (2) 公比為 -6 (3) $a_8 = -384$ (4) 前10項的和為1025 (5) $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ 亦為等比數列

2. 據說畢達哥拉斯研究過這樣的問題: 下圖中的黑點分別落在正五邊形的頂點或邊上, 第1圖有5個黑點, 第2圖共有12個黑點, 第3圖則有22個黑點。設 a_n 為第 n 圖中黑點的總數, 即 $a_1 = 5$, $a_2 = 12$, $a_3 = 22$, ..., 依此類推, 請選出正確的選項?



- (1) $a_4 = 35$ (2) $a_n = a_{n-1} + (3n+1), n \geq 2$ (3) $a_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ (4) $a_{19} = 590$ (5) $\sum_{n=1}^8 a_n = 398$

3. 下列哪些選項是正確的? (1) $\sum_{k=1}^5 (2 \times 7) = 2 \sum_{k=1}^5 7$ (2) $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k+3} = \sum_{k=1}^4 \frac{n}{n+3}$ (3) $\sum_{k=1}^n k^2 = (\sum_{k=1}^n k)^2$

- (4) $\sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{n=3}^6 a_{n-2}$ (5) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{9 \times 11} = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+2)}$

4. 從 1 到 1000 的連續正整數中, 下列哪些選項是正確的?

- (1) 不含 0 的有 729 個數字
(2) 恰含一個 0 (如 20, 702) 的有 171 個數字
(3) 至少含一個 0 (如 20, 400, 1000) 的有 180 個數字
(4) 含有奇數個 0 的有 172 個數字

(5)若將這 1000 個數字逐一寫出，共寫了192個0

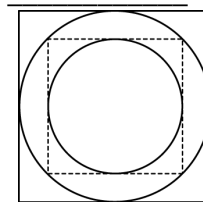
三、填充題(全對才給分。不依題號順序，依答對格數給分，請參考分數對照表，共50分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	6	12	18	24	30	34	38	42	46	50

1. 設有一數列 $\{a_n\}$ 之前 n 項和為 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 5n^2 - 2n$ ，則一般項 $a_n =$ _____
2. 設三正數成等差數列，其和為39，若三數依序加上 3, 7, 29，則成為等比數列，求此三數中最小的數為_____

3. 設數列 $\{a_n\}$ 中滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = \frac{4-a_n}{3-a_n}$ ， n 為正整數，求數對 $(a_2, a_{10}) =$ _____

4. 如右圖最大正方形 T_1 的周長64， C_1 為 T_1 之內切圓， T_2 為 C_1 之內接正方形， C_2 為 T_2 之內切圓，如此繼續下去，得到一序列的圓形 $C_1, C_2, C_3, \dots$ ，設 a_n 為圓形 C_n 之面積，試求 $n \geq 2$ 時、數列 a_n 與 a_{n-1} 的遞迴關係式為_____。



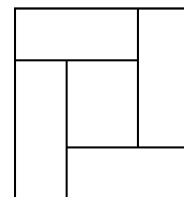
5. 數列 $a_1 + 1 \times 38, a_2 + 2 \times 35, a_3 + 3 \times 32, \dots, a_k + k \times (41 - 3k), \dots, a_{10} + 10 \times 11$ 共有十項，且其和為 360，則 $a_1 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值為_____

6. 級數和 $\frac{1}{1^2+2} + \frac{1}{2^2+4} + \frac{1}{3^2+6} + \dots + \frac{1}{11^2+22} =$ _____

7. 設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊且 a, b, c 均為正整數，若 $a \geq b \geq c$ ， $a + b + c = 19$ ，問滿足條件的數對 (a, b, c) 有_____組

8. 在 1 到 800 的正整數中，與90的最大公因數為15的數有 _____ 個

9. 用六種不同顏色塗右列圖形的空白區域，每塊區域只塗一種顏色，顏色可重複使用，但相鄰區域不同色，有 _____ 種塗法



10. 已知一數列： $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{9}{9}, \frac{16}{9}, \frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{9}{11}, \frac{16}{11}, \frac{25}{11}, \dots$ ，依此規則，求此數列的前 66 項和為_____

四、證明題：(共8分)

1. 利用數學歸納法證明：對於所有正整數 n ， $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ 恆成立

【試題結束】

國立高師大附中106學年度第二學期高一數學科第一次期中考答案卷

高一__班 座號: __ 姓名: __

一、單選題: (每題5分, 共10分。每題答對得5分, 答錯得0分, 未作答不給分。)

<u>1</u>	<u>2</u>
5	4

二、多重選擇題: (每題8分, 共32分。每題全對得8分, 只錯一個選項可得5分, 錯兩個選項可得2分, 錯超過兩個選項或未作答不給分。)

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
35	1234	14	245

三、填充題(全對才給分。不依題號順序, 依答對格數給分, 請參考分數對照表, 共50分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	6	12	18	24	30	34	38	42	46	50

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
$10n-7$	5	$(\frac{7}{5}, \frac{55}{29})$	$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$	-740
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
$\frac{209}{312}$	10	18	1560	$\frac{286}{3}$

四、證明題: (共8分)

1. 利用數學歸納法證明: 對於所有正整數 n , $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$
恆成立

證明(1)當 $n=1$ 時, 左式 $= 1^2 = 1$ = 右式 $= \frac{1}{3} \times 1 \times (2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1) = 1$ 原式成立..... (1分)

(2)設 $n=k$ 時原式成立, 即 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$, (1分)
當 $n=k+1$ 時,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1) + (2k+1)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3) = \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2 + 5k + 3) \\ &= \frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3) = \frac{1}{3}(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1) = \text{右式, 原式也成立} \cdots \cdots (5分) \end{aligned}$$

故由數學歸納法故得證, (1分)

國立高師大附中106學年度第二學期高一數學科第一次期中考答案卷

高一__班 座號:__ 姓名:

一、單選題:(每題5分,共10分。每題答對得5分,答錯得0分,未作答不給分。)

<u>1</u>	<u>2</u>

二、多重選擇題:(每題8分,共32分。每題全對得8分,只錯一個選項可得5分,錯兩個選項可得2分,錯超過兩個選項或未作答不給分。)

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>

三、填充題(全對才給分。不依題號順序,依答對格數給分,請參考分數對照表,共50分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	6	12	18	24	30	34	38	42	46	50

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>

四、證明題:(共8分)

1. 利用數學歸納法證明:對於所有正整數 n , $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ 恆成立