

Цель занятия:**Деятельностная:**

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с обратными тригонометрическими функциями.

Содержательная:

- актуализировать знания о тригонометрических функциях;
- расширить знания учеников за счет уточнения понятий арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс;
- познакомиться с задачами на применение обратных тригонометрических функций.

План занятия:

1. Обратные тригонометрические функции.
2. Свойства и графики тригонометрических функций.

1. Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции – это арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Сначала дадим определения.

Арксинусом числа a называется число $\varphi = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $\sin \varphi = a$. Или, можно сказать, что это такой угол φ , принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу a .

Арккосинусом числа a называется число, $\varphi = [0; \pi]$ такое, что $\cos \varphi = a$.

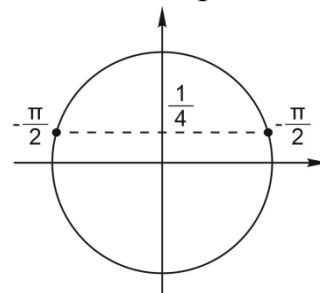
Арктангенсом числа a называется число, $\varphi = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $\operatorname{tg} \varphi = a$.

Арккотангенсом числа a называется число $\varphi = (0; \pi)$, такое, что $\operatorname{ctg} \varphi = a$.

Расскажем подробно об этих четырех новых для нас функциях – обратных тригонометрических.

Например, мы хотим решить уравнение $\sin x = \frac{1}{4}$. Ясно, что его решения соответствуют точкам на тригонометрическом круге, ордината которых равна $\frac{1}{4}$. И ясно, что это не табличное значение синуса. Как же записать решения?

Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен данному числу a . Да, все уже догадались. Это арксинус.



Угол, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{1}{4}$ – это арксинус одной четвертой. И значит, серия решений нашего уравнения, соответствующая правой точке на тригонометрическом круге, – это $\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

А вторая серия решений нашего уравнения – это $\pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Осталось выяснить – зачем в определении арксинуса указывается, что это угол,

принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Дело в том, что углов, синус которых равен, например, $\frac{1}{4}$, бесконечно много. Нам нужно выбрать какой-то один из них. Мы выбираем тот, который лежит на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Взгляните на тригонометрический круг. Вы увидите, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ каждому углу соответствует определенное значение синуса, причем только одно. И наоборот, любому значению синуса из отрезка $[-1; 1]$ отвечает одно-единственное

значение угла на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что на отрезке $[-1; 1]$ можно задать функцию $y = \arcsin x$, принимающую значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

$\sin(\arcsin a) = a, a \in [-1; 1]$ $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\cos(\arccos a) = a, a \in [-1; 1]$ $\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in [0; \pi]$
--	--

$$\sin(\arcsin 0,7) = 0,7.$$

$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Между рассмотренными обратными тригонометрическими функциями существует два полезных соотношения, которые позволяют выражать одну функцию через другую:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

2. Свойства и графики тригонометрических функций.

$$y = \arcsin x$$

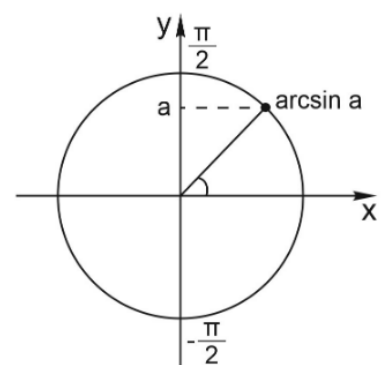
Арксинусом числа a называется число $\varphi = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $\sin \varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \arcsin a$ Область определения арксинуса

– отрезок $[-1; 1]$. Область значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Можно запомнить фразу «арксинусы живут справа». Не забываем только, что не просто справа, но ещё и на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



Мы готовы построить график функции $y = \arcsin x$.

Как обычно, отмечаем значения x по горизонтальной оси, а значения y – по вертикальной.

Поскольку $x = \sin y$, следовательно, x лежит в пределах от -1 до 1 .

Значит, областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$.

Мы сказали, что y принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значит, что областью значений функции $y = \arcsin x$ является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что график функции $y = \arcsin x$ весь помещается в области, ограниченной линиями

$$x = -1; x = 1; y = -\pi/2; y = \pi/2$$

Как всегда при построении графика незнакомой функции, начнем с таблицы.

По определению, арксинус нуля – это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен нулю. Что это за число? – Понятно, что это ноль.

Аналогично, арксинус единицы – это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен единице. Очевидно, это $\pi/2$.

Продолжаем: $\arcsin \frac{1}{2}$ – это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{1}{2}$. Да, это $\pi/6$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

Строим график функции $y = \arcsin x$

Свойства функции

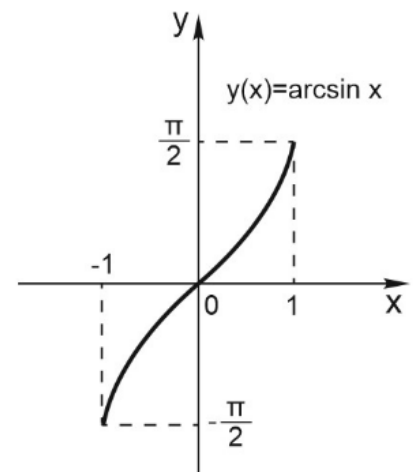
1. Область определения $D(x) : x \in [-1; 1]$

2. Область значений $E(y) : y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, то есть эта функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает. Ее наименьшее значение, равное $-\pi/2$, достигается при $x = -1$, а наибольшее значение, равное $\pi/2$, при $x = 1$

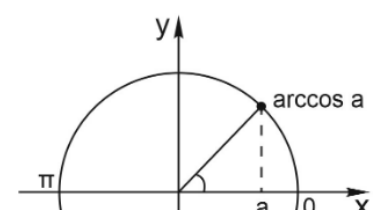
5. Симметричность относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \sin x$.



$y = \arccos x$

Арккосинусом числа a называется число, $\varphi = [0; \pi]$ такое, что $\cos \varphi = a$.

Легко запомнить: «арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке $[0; \pi]$. Обозначение: $\varphi = \arccos a$.



Область определения арккосинуса – отрезок $[-1;1]$. Область значений – отрезок $[0;\pi]$.

Очевидно, отрезок $[0;\pi]$ выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1 , соответствует одно-единственное значение угла из промежутка $[0;\pi]$.

Арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией. Зато мы можем использовать следующее очевидное соотношение: $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

Построим график функции $y=\arccos x$.

Нам нужен такой участок функции $y=\cos x$, на котором она монотонна, то есть принимает каждое свое значение ровно один раз.

Выберем отрезок $[0;\pi]$. На этом отрезке функция $y=\cos x$ монотонно убывает, то есть соответствие между множествами $[0;\pi]$ и $[-1;1]$ взаимно однозначно. Каждому значению x соответствует свое значение y . На этом отрезке существует функция, обратная к косинусу, то есть функция $y=\arccos x$.

Заполним таблицу, пользуясь определением арккосинуса.

Арккосинусом числа x , принадлежащего промежутку $[-1;1]$, будет такое число y , принадлежащее промежутку $[0;\pi]$, что $x=\cos y$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0

Вот график арккосинуса:

Свойства функции $y=\arccos x$

1. Область определения $D(x) : x \in [-1;1]$

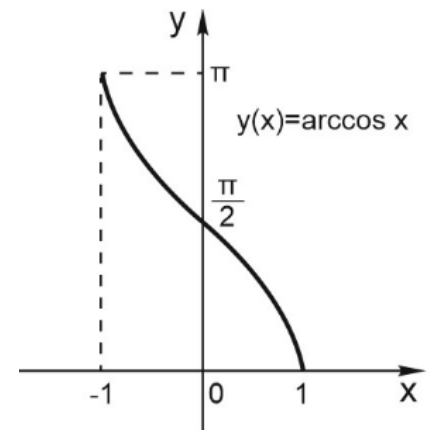
2. Область значений $E(y) : y \in [0;\pi]$

3. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

Эта функция общего вида – она не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция является строго убывающей. Наибольшее значение, равное π , функция $y=\arccos x$ принимает при $x=-1$, а наименьшее значение, равное нулю, принимает при $x=1$.

5. Функции $y=\cos x$ и $y=\arccos x$ являются взаимно обратными.



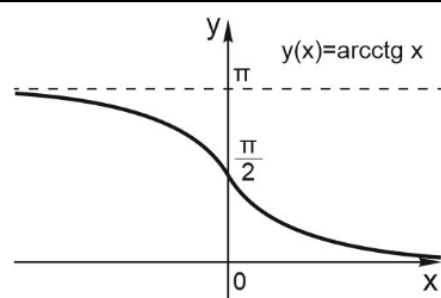
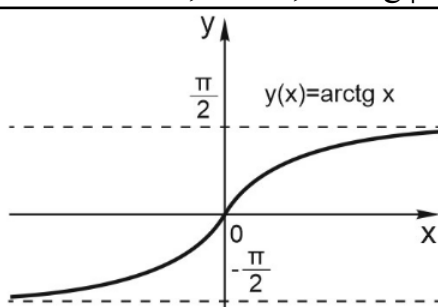
$y=\arctg x$ и $y=\arcc tg x$

Аргтангенсом числа a называется число,

$\varphi = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $\operatorname{tg} \varphi = a$.

Арктангенсом числа a называется

число $\varphi = (0; \pi)$, такое, что $\operatorname{ctg} \varphi = a$.



Свойства функции $y=\arctg x$ 1. Область определения $D(x) : x \in \mathbb{R}$ 2. Область значений $E(y) : y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ 3. Функция нечетная. 4. Функция строго возрастающая. 5. Прямые $y = -\pi/2$ и $y = \pi/2$ – горизонтальные асимптоты функции. 6. Функции $y=\tg x$ и $y=\arctg x$ являются взаимно обратными, когда функция $y=\tg x$ рассматривается на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Свойства функции $y=\text{arccctg} x$ 1. Область определения $D(x) : x \in \mathbb{R}$ 2. Область значений $E(y) : y \in (0; \pi)$ 3. Функция общего вида, то есть ни четная, ни нечетная. 4. Функция является строго убывающей. 5. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ – горизонтальные асимптоты данной функции. 6. Функции $y=\text{ctg} x$ и $y=\text{arccctg} x$ являются взаимно обратными – конечно, когда функция $y=\text{ctg} x$ рассматривается на промежутке $(0; \pi)$
--	---

Задачи

Задача №1. Вычислить а) $\arcsin 1$; б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\text{arccctg} \sqrt{3}$.

Как видим все аргументы аркфункций положительные и табличные, а это значит, что мы можем восстановить значение углов по первой части таблицы значений тригонометрических функций для углов от 0° до 90° . Этот диапазон углов входит в область значений каждой из аркфункций, поэтому просто пользуемся таблицей, находим в ней значение тригонометрической функции и восстанавливаем, какому углу оно соответствует.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} & \text{б) } \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \\ \text{в) } \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6} & \text{г) } \text{arccctg} \sqrt{3} = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Далее будем работать с углами в радианах, т.к. это чаще используется в современной науке.

Ответ. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

Задача №2. Вычислить а) $\arcsin(-\frac{1}{2})$; б) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; в) $\arctg(-1)$; г) $\text{arccctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

В данном примере мы уже видим отрицательные аргументы. Типичная ошибка в данном случае – это просто вынести минус из-под функции и просто свести задачу к предыдущей. Однако это делать можно не во всех случаях. Вспомним, как в теоретической части урока мы оговаривали четность всех аркфункций. Нечетными из них являются арксинус и арктангенс, т.е. из них выносятся минус, а арккосинус и арккотангенс – это функции общего вида, для упрощения минуса в аргументе у них имеются специальные формулы. После расчета во избежание ошибок проверяем, чтобы результат входил в область значений.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \\ \text{б) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi] & \\ \text{в) } \arctg(-1) = -\arctg 1 = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) & \\ \text{г) } \text{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \text{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) & \end{array}$$

Когда аргументы функций упрощены до положительной формы, выписываем из таблицы соответствующие им значения углов.

Ответ. а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{2\pi}{3}$.

Задача №3. Вычислить а) $\arcsin(-2)$; б) $\arccos\frac{\pi}{3}$.

а) Типичная ошибка в данном случае – это начать выносить минус и что-то упрощать. Первое, что необходимо заметить, это то, что аргумент арксинуса не входит в область определения

$$-2 \notin [-1; 1]$$

Следовательно, данная запись не имеет значения, и вычислить арксинус нельзя.

б) Стандартная ошибка в данном случае заключается в том, что путают местами значения аргумента и функции и дают ответ $\frac{1}{2}$. Это неверно! Конечно, возникает мысль, что в таблице косинусу $\frac{\pi}{3}$ соответствует значение $\frac{1}{2}$, но в таком случае перепутано то, что вычисляются аркфункции не от углов, а от значений тригонометрических функций. Т.е. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, а не $\arccos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Кроме того, поскольку мы выяснили, что $\frac{\pi}{3}$ является именно аргументом арккосинуса, то необходимо проверить, чтобы он входил в область определения. Для этого вспомним, что $\pi \approx 3,14 > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1$, т.е. $\frac{\pi}{3} \notin [-1; 1]$, а значит арккосинус не имеет смысла и вычислить его нельзя.

Кстати, например, выражение $\arccos\frac{\pi}{4}$ имеет смысл, т.к. $\frac{\pi}{4} \in [-1; 1]$, но поскольку значение косинуса, равное $\frac{\pi}{4}$ не является табличным, то и вычислить арккосинус с помощью таблицы нельзя.

Ответ. Выражения не имеют смысла.

Задача №4. Вычислить $\arctg 0 \cdot \arccos\frac{1}{3}$.

По сути дела задача сводится к самой первой, просто нам необходимо отдельно вычислить значения двух функций, а потом подставить их в исходное выражение.

Аргумент арктангенса табличный $\arctg 0 = 0$ и результат принадлежит области значений.

Аргумент арккосинуса не табличный, но нас это не должно пугать, т.к. чему бы не был равен арккосинус, его значение при умножении на ноль даст в результате ноль. Осталось одно важное замечание: необходимо проверить принадлежит ли аргумент арккосинуса области определения, поскольку если это не так, то все выражение не будет иметь смысла в независимости от того, что в нем присутствует умножение на ноль. Но $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, поэтому мы можем утверждать, что $\arccos\frac{1}{3}$ имеет смысл и в ответе получаем ноль.

Ответ. 0.

Приведем еще пример, в котором необходимо уметь вычислить одну аркфункцию, зная значение другой.

Задача №5. Вычислить $\arccos x$, если известно, что $\arctg x = \frac{\pi}{5}$.

Может показаться, что необходимо из указанного уравнения вычислить сначала значение $\arcsin x$, а затем подставить его в искомое выражение, т.е. в $\arctan$, но этого делать не нужно.

Вспомним, по какой формуле связаны между собой указанные функции:

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

И выразим из нее то, что нам нужно:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

Для уверенности можете проверить, что результат лежит в области значений $\arcsin$.

Ответ: $\frac{3\pi}{10}$.

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Назовите функции, обратно-пропорциональные тригонометрическим функциям. При каких условиях выполняется обратная пропорциональность?

1.2. Какова связь между обратными функциями к косинусу и синусу?

1.3. Перечислите основные свойства графика обратных тригонометрических функций?

2. Решите предложенные задания (письменно):

В зависимости от номера в списке: нечетный – 1 вариант, четный – 2 вариант.

Вариант I	Вариант II
1. Вычислите: А) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ Б) $\arcsin(-0,5)$ В) $2 \arccos(-1)$ 2. Найдите значение выражения: А) $\arctg \sqrt{3} - \operatorname{arccot}(-1) + \arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ Б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ В) $\sin(\arcsin \frac{1}{3})$ Г) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ Д) $\sin(\arcsin(\sin \frac{\pi}{6}))$	1. Вычислите: А) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ Б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ В) $4 \arcsin(-1)$ 2. Найдите значение выражения: А) $\arctg(-1) - \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ Б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos \frac{1}{2}$ В) $\cos(\arccos 0,4)$ Г) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{4}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ Д) $2 \cos(\arccos(\cos \frac{\pi}{3}))$

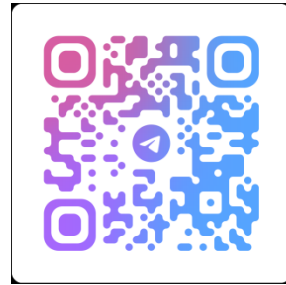
ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 6 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru



В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 30.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 30.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: <https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.