

ALGEBREPartie I

I.1) Par construction **B** est un système générateur de E donc pour prouver qu'il est une base de E il suffit de montrer qu'il est libre .

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels On a les implications suivantes :

$$\lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 g_1 = 0_{C^*(R,R)} \iff x \in R, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x) + \lambda_4 \sin(x) = 0$$

La résolution de ce dernier système conduit assez vite à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc **B** est libre et $\dim(E) = 4$.

I.2) Pas de problème pour prouver que ...

a) $\langle, \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ (avec f et g dans E fg est continue sur $[-\pi, \pi]$).

b) $\langle, \rangle$ est symétrique ($fg = gf$).

c) $\langle, \rangle$ est linéaire à droite donc aussi à gauche vu la symétrie (linéarité de l'intégrale).

d) Pour la stricte positivité :

Soit f dans E on a immédiatement $\langle f, f \rangle \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive avec les bornes bien rangées).

Si $\langle f, f \rangle = 0$ alors la continuité et la positivité de f entraînent : $x \in [-p, p], f(x) = 0$ {

et en écrivant f sous la forme $\lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 g_1$ on peut reprendre le raisonnement du I.1) et

prouver que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ donc f est nulle sur tout $\mathbb{R}$ C.Q.F.D.

I.3) (f_0, g_1) est une base de F (il est générateur par construction et libre comme sous-système d'un système libre : **B**) .

(g_0, f_1) est une base de G (idem) .Donc la réunion d'une base de F et d'une base de G donne ici une base de E . Ceci suffit pour avoir $F \oplus G = E$.

En posant $u = \lambda_1 f_0 + \lambda_4 g_1$ $v = \lambda_3 f_1 + \lambda_2 g_0$ on obtient

$$\langle u, v \rangle = \lambda_1 \lambda_3 \langle f_0, f_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_2 \langle f_0, g_0 \rangle + \lambda_4 \lambda_3 \langle g_1, f_1 \rangle + \lambda_4 \lambda_2 \langle g_1, g_0 \rangle \text{ (bilinéarité) et}$$

donc pour

prouver que $F \perp G$ il suffit de vérifier $\langle f_0, f_1 \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle = \langle g_1, f_1 \rangle = \langle g_1, g_0 \rangle = 0$ et ces intégrales sont nulles comme intégrales de fonctions impaires sur un intervalle centré en 0 .

I.4) Le procédé de SCHMIDT conduit à :

$$\text{Une B.O.N. de F est } (e_1, e_2) \text{ avec } \begin{cases} e_1 = f_0 \\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{3} - \frac{3}{4}}} (g_1 + \frac{1}{2}f_0) \end{cases}$$

$$\text{Une B.O.N. de G est } (e_3, e_4) \text{ avec } \begin{cases} e_3 = g_0 \\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{1}{2}}} f_1 \end{cases}$$

I.5) (e_1, e_2) est une base de F , (e_3, e_4) est une base de G et $F \oplus G = E$. donc (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E .

De plus elle est orthonormée car (e_1, e_2) et (e_3, e_4) le sont et que $F \perp G$.

Partie II

II.1) On peut reprendre le raisonnement de I.1) avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dans $\mathbb{C}$.

II.2) a) si $f = \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 g_1$ est un élément de H alors on obtient

$$j(f) = \lambda_1 f_0' + \lambda_2 g_0' + \lambda_3 f_1' + \lambda_4 g_1' = \lambda_1(-g_0) + \lambda_2 f_0 + \lambda_3(f_0 - g_1) + \lambda_4(g_0 + f_1)$$

laquelle reste une

combinaison linéaire des vecteurs de **B** donc reste dans H. ϕ est donc une application de H dans H.

b) ϕ est linéaire car la dérivation est $\mathbb{C}$ -linéaire C.Q.F.D.

II.3) Compte tenu des calculs du II.2) on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II.4) } M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } (M^2 + I) = O_{M_4(\mathbb{C})}$$

II.5) La division euclidienne en question s'écrit :

$$(*) \quad X^n = (X + 1)^2 Q + R \text{ avec } \deg(R) < 2 \text{ donc on pose } R = aX + b$$

En faisant l'application numérique $X \leftarrow -1$ sur (*) et sa dérivée membre à membre on obtient :

$$\{b - a = (-1)^n a = n(-1)^{n-1}$$

ce qui donne

En composant membre à membre (*) par X^2 on obtient :

$$(**) \quad X^{2n} = (X^2 + 1)^2 Q_0 X^{2n-4} + (-1)^{n-1} n X^2 + (-1)^n (1 - n) X^{R_1} \text{ et } \deg(R_1) \leq 2 < 4 = \deg(X^2 + 1)^2 \text{ Donc}$$

En

multipliant membre à membre (**) par X on obtient de même ...

II.6)

On

sait (ou bien on redémontre) que l'application

$$C[X] P \rightarrow a M_4(\mathbb{C}) P(M) \text{ où } P(M) \text{ est obtenue par substitution de } M \text{ à la place de } X \text{ dans l'écriture } \sum_{k=0}^{\infty} \dots$$

II.7) M^{2n} est la matrice de ϕ^{2n} donc sa dernière colonne donne les composante de la dérivée $2n^{\text{ème}}$ de g_1 dans la base B laquelle peut s'obtenir par la formule de LEIBNIZ. On trouve :

$$g_{1(2n)}(x) = C_{2n}^0 x \sin^{(2n)}(x) + C_{2n}^1 \sin^{(2n-1)}(x) = x \sin(x + 2 \frac{np}{2}) + 2n \sin((2n-1) \frac{p}{2} + x) g_{1(2n)}(x) = (-1)^n$$

Ceci donne donc la dernière colonne de M^{2n} à savoir $[2n(-1)^{n-1} \ 0 \ 0 \ (-1)^n]$ que l'on contrôle grace au calcul de M^{2n} de II.6).

Partie III

III.1) Le polynôme caractéristique de ϕ est $(\lambda^2 + 1)^2$ (déterminant triangulaire par blocs).

Donc Les valeurs propres de j sont i et $-i$ chacune d'ordre 2

III.2) On cherche $E_i(\phi)$ en résolvant $M X = i X$ dans $M_{(4,1)}(\mathbb{C})$ et on trouve

$$E_i(\phi) = \text{Vect}(f_0 + i g_0) \text{ de dimension } 1 < 2 \text{ (ordre de multiplicité) : .}$$

j n'est pas diagonalisable

III.3) Si on pose $B' = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ on doit chercher B' telle que

$\{j(V_1) = iV_1 j(V_2) = iV_2 + V_1(1) j(V_3) = -iV_3 j(V_4) = -iV_4 + V_3(2) \text{ donc on choisit } V_1 = f_0 + ig_0 \text{ et } V_3$
 puis la résolution des
 systèmes (1) et (2) donne (par exemple)

$$\mathbf{B}' = (f_0 + ig_0, f_1 + ig_1, f_0 - ig_0, f_1 - ig_1)$$

Remarque : on trouve d'autres solutions en ajoutant
 $\{x(f_0 + ig_0) \wedge V_2 \text{ avec } x \text{ dans } \mathbb{C} \quad y(f_0 - ig_0) \wedge V_4 \text{ avec } y \text{ dans } \mathbb{C}$

Partie IV

IV.1 Soit $f = \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 g_1$ un élément de H. Un calcul de $T_\alpha(f)(x)$ conduit à

$T_\alpha(f) = -\alpha(\lambda_2 + \lambda_3)f_0 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_4)g_0 + (2-\alpha)\lambda_3 f_1 + (\alpha-2)\lambda_4 g_1$ Donc $T_\alpha(f)$ est dans H et T_α est une
 application de H dans H et ce calcul donne la définition analytique de T_α dans la base $\mathbf{B}$ laquelle
 prouve
 que

IV.2) Pour calculer N' on peut avantageusement calculer les images des éléments de $\mathbf{B}'$ par T_α en utilisant
 les résultats de IV.1) puis exprimer les résultats dans la base $\mathbf{B}'$. On trouve

IV.3) Le calcul de N' a montré les valeurs propres de N' donc de T_α . Ce sont

$-\alpha i, \alpha i, (2-\alpha)i, (\alpha-2)i$ chacune d'ordre 1 si elles sont distinctes

1^{er} cas : $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ $\{T_\alpha \text{ a 4 v.p. distinctes dans un espace de dimension 4}$
 elle est diagonalisable.

2^{ème} cas : $\alpha = 0$ N' est diagonale donc T_α est diagonalisable.

3^{ème} cas : $\alpha = 1$ N' a 2 v.p. chacune d'ordre 2 (i et $-i$) le calcul prouve que les espaces propres associés
 sont chacun de dimension 2 donc T_α est diagonalisable.

4^{ème} cas : $\alpha = 2$ presque identique au 3^{ème} cas avec les v.p. 0 d'ordre 2 et $2i$ et $-2i$ chacune d'ordre 1
 (bien sûr on ne calcule que l'espace propre associé à 0 les deux autres étant chacun de dimension 1
 d'après le cours)

Dans tous les cas T_α est diagonalisable

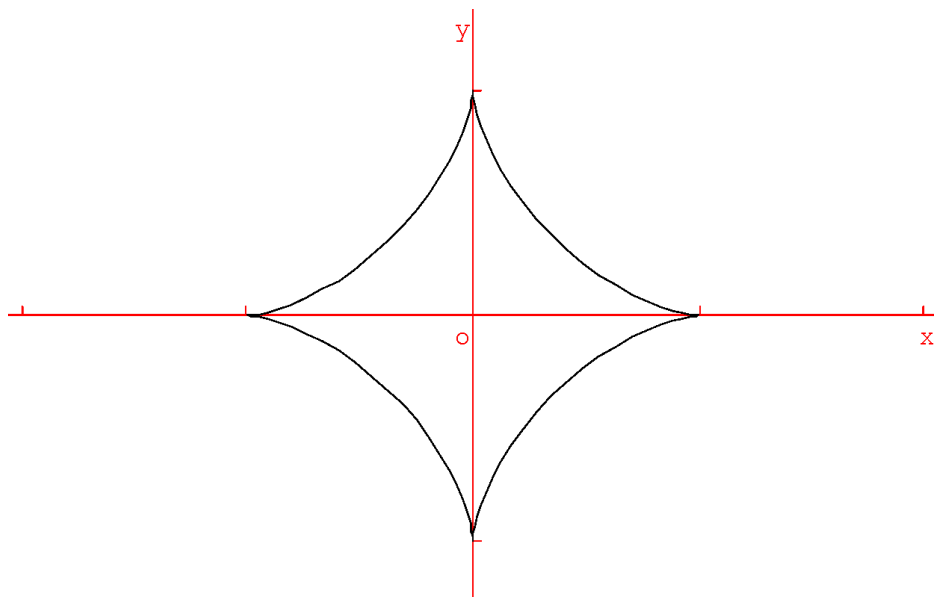
IV.4) les solutions de l'E.D. en question situées dans H sont exactement les éléments du noyau de T_α

α convient $\hat{U} \text{ Ker}(T_\alpha) \setminus \{0_H\} \hat{U} 0 \text{ est v.p. de } T_\alpha$

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2$$

GEOMETRIE

Géo1) On étudie donc $G_1: \{x = \cos^3 t, y = \sin^3 t\}$ Courbe classique (astroïde) pas de problème



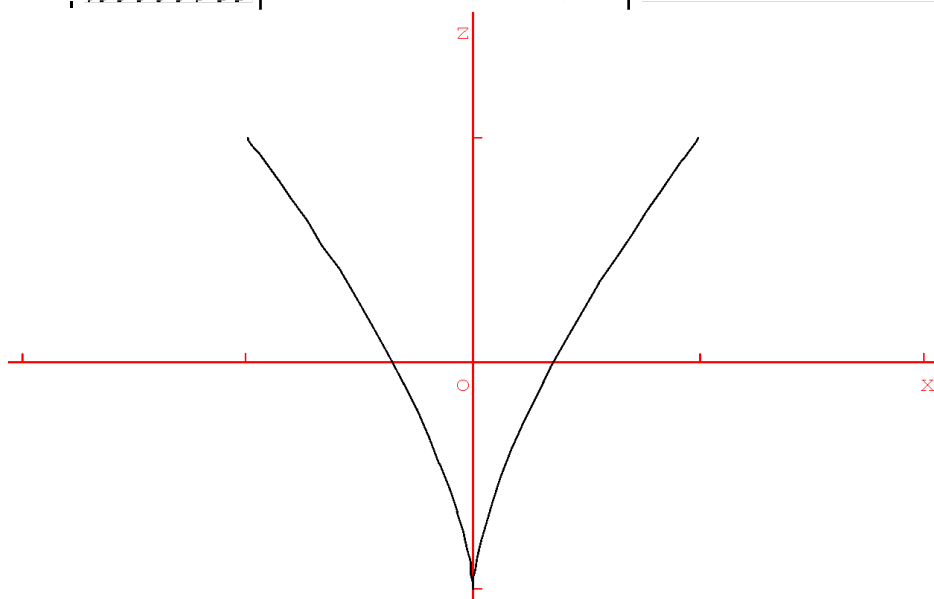
Géo2) On étudie donc $G_2: \{x = \cos^3 t, z = \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 : M_2(t)\}$

On observe que cette courbe admet aussi l'équation

$$\{z = 2(\sqrt[3]{x})^2 - 1 = 2x^{\frac{2}{3}} - 1 : x \in [-1, 1]\}$$

Donc $\frac{dz}{dx} = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ et z est fonction paire de x d'où les résultats suivants

x	-1	0	1
$\frac{dz}{dx}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
z	-4/3	-1	1



Géo3) Soit M de coordonnées (x, y, z) un point quelconque de l'espace (identifié à $\mathbb{R}^3$)

Soit S la surface cherchée .

Même il existe un point de $G(\text{not } M(t))$ etq dans R tels que $M = R(O, \bar{k}, q)(M(t))$

Un calcul simple donne $\cos^6 t + \sin^6 t = \frac{1}{4} (1 + 3\cos^2(2t)) = \frac{1}{4} (1 + 3z^2)$ et on aboutit à

$$\frac{1}{4} (1 + 3z^2) = x^2 + y^2 \quad z = \cos(2t) \quad \text{donc}$$

On reconnaît une portion d'Hyperboloïde à une nappe limitée par deux plans parallèles à xOy ($z=1, z=-1$).

Géo4) On obtient $\frac{d\bar{M}}{dt} = -\sin t \cos t \bar{V} > (\text{avec } \bar{V} \geq 3(\cos t) \bar{i} > -3(\sin t) \bar{j} > +4\bar{k} >)$

Donc en tout

point non stationnaire $(t^1 k \frac{p}{2})$ le vecteur $\bar{V} >$ dirige effectivement la tangente à Γ C.Q.F.D.

Géo5) Les différentes symétries de Γ :

{par rapport $\hat{O}z$ ($t \rightarrow t + p$) par rapport $\hat{xOz}$ ($t \rightarrow -t$) par rapport au plan $x = y$ ($t \rightarrow \frac{p}{2} - t$)}

permettent de n'étudier que

les points stationnaires de $[0, \pi/4]$ dans lequel seul $M(0)$ pose problème.

Un calcul simple donne :

$$\frac{d\bar{M}(0)}{dt} > -2\sin^2(\frac{t}{2}) \bar{W} > (t) \text{ avec } \bar{W} > (t) = (1 + \cos t + \cos^2 t) \bar{i} > + 4\sin(t/2)\cos^3(\frac{t}{2}) \bar{j} > + 4\cos^3(\frac{t}{2}) \bar{k} >$$

Géo6) Pas de problème .on trouve :

Géo7) Le plan tangent à Σ en $N(t, \lambda)$ est $\perp$ à

$$\bar{N} > \frac{1}{\lambda} \bar{U} \bar{N} > \frac{1}{\lambda} = -3\lambda(4\cos t \bar{i} > + 4\sin t \bar{j} > - 3\cos(2t) \bar{k} >)$$

Le plan cité par l'énoncé est $\perp$ à $4\bar{i} > - 3\bar{k} >$ Par conséquent on cherche les points réguliers de Σ où ces deux vecteurs sont colinéaires .

Les points de S où le plan tangent est parallèle au plan d'équation $4x - 3z = 0$ sont les

FIN