

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,5 điểm gồm 10 câu, mỗi câu 0,25 điểm)**

**Câu 1:** Phương trình  $(m-6)x=8$  ( $x$  là ẩn,  $m$  là tham số) có nghiệm duy nhất khi:

- A.  $m=6$                       B.  $m>6$                       C.  $m<6$                       D.  $m\neq 6$

**Câu 2:** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{cases}$  có nghiệm là:

- A.  $(2;1)$                       B.  $(-2;1)$                       C.  $(-2;-1)$                       D.  $(2;-1)$

**Câu 3:** Biết đồ thị hàm số  $y=ax^2$  đi qua điểm  $M(2;-4)$ , khi đó giá trị của hệ số  $a$  là:

- A. 1                      B. -2                      C. -1                      D. 2

**Câu 4:** Điều kiện xác định của biểu thức  $\sqrt{2x-6}$  là:

- A.  $x\leq 3$                       B.  $x\neq 3$                       C.  $x\geq 3$                       D.  $x> 3$

**Câu 5:** Biểu thức  $\frac{a^2-b^2}{a-b}$  (với  $a\neq b$ ) được rút gọn thành:

- A.  $a-b$                       B.  $a+b$                       C.  $ab$                       D.  $\frac{a}{b}$

**Câu 6.** Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng  $y=-2x+1$  ?

- A.  $y=2x-1$  .                      B.  $y=6-2(x+1)$  .                      C.  $y=2x+1$  .                      D.  $y=1-2x$  .

**Câu 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB=3$ ,  $BC=6$ . Số đo của  $\angle ACB$  bằng

- A.  $90^\circ$  .                      B.  $45^\circ$  .                      C.  $60^\circ$  .                      D.  $30^\circ$  .

**Câu 8.** Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính  $R$  là

- A.  $S=4\pi R^2$ .                      B.  $S=4\pi R$ .                      C.  $S=\frac{4}{3}\pi R^2$ .                      D.  $S=2\pi R^2$ .

**Câu 9:** Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số vé không bán được trong 62 buổi chiếu phim:

|        |        |         |          |          |          |          |      |
|--------|--------|---------|----------|----------|----------|----------|------|
| Lớp    | [0; 5) | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | Cộng |
| Tần số | 3      | 8       | 15       | 18       | 12       | 6        | 62   |

Hỏi có bao nhiêu buổi chiếu phim có nhiều nhất 19 vé không bán được?

- A. 42                      B. 43                      C. 44                      D. 45

**Câu 10.** Gieo một con xúc xắc. Xác suất để mặt chấm chẵn xuất hiện là?

- A. 0,2                      B. 0,3                      C. 0,4                      D. 0,5

## II. PHẦN TỰ LUẬN (7,5 điểm; gồm 6 câu, từ câu 11 đến câu 17).

**Câu 11.** (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức sau:

$$M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-6} \quad (x \geq 0; x \neq 9)$$

**Câu 12.** (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-2y=16 \end{cases}$$

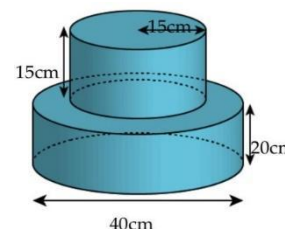
**Câu 14.** (1,5 điểm) Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn

$$|x_1 - m| - \sqrt{x_2 + (m-1)^2} = 0$$

**Câu 15:** (1,25 điểm) Một chiếc bánh sinh nhật được thiết kế có hai tầng, tầng phía trên cao 15 cm, bán kính tầng trên là 15 cm, tầng phía dưới cao 20 cm, đường kính tầng dưới là 40 cm (như hình bên).



a) (0,75 điểm) Tính thể tích của chiếc bánh.

b) (0,5 điểm) Tính diện tích bề mặt để trang trí bánh, biết mặt đáy của bánh sinh nhật không được trang trí?

**Câu 16 :** (2,25 điểm) Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , cùng phía với nửa đường tròn vẽ  $Ax, By$  lần lượt là các tia tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AO$ . Lấy hai điểm  $P, Q$  nằm trên  $Ax, By$  sao cho  $\widehat{PIQ} = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  lên  $PQ$ .

1. Chứng minh tứ giác  $APHI$  nội tiếp.

2. Gọi  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $AH$  với  $PI$  và  $BH$  với  $IQ$ . Chứng minh  $MN \parallel AB$

3. Chứng minh tích AP. BQ không đổi. Xác định vị trí các điểm  $P, Q$  trên Ax, By sao cho diện tích  $\Delta IPQ$  nhỏ nhất.

**Câu 17. (0,5 điểm)** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ .

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc} + \frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac} + \frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

----- Hết -----

### HƯỚNG DẪN CHẤM

#### I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,5 điểm)

Mỗi câu trả lời đúng được tính 0,25 điểm

| Câu    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Đáp án | D | A | C | C | B | B | D | A | C | D  |

**Câu 1:** Phương trình  $(m-6)x=8$  ( $x$  là ẩn,  $m$  là tham số) có nghiệm duy nhất khi:

- A.  $m=6$                       B.  $m>6$                       C.  $m<6$                       D.  $m \neq 6$

**Lời giải**

Chọn **D** vì phương trình có nghiệm duy nhất khi hệ số  $m-6 \neq 0 \Rightarrow m \neq 6$

**Câu 2:** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{cases}$  có nghiệm là:

- A.  $(2;1)$                       B.  $(-2;1)$                       C.  $(-2;-1)$                       D.  $(2;-1)$

**Lời giải**

Chọn **A** vì ta nhân phương trình dưới với 2 sau đó cộng với phương trình trên về với về ta được phương trình:  $7y=7$  suy ra  $y=1$ . Với  $y=1$  thay vào phương trình  $x-3y=-1$  suy ra  $x=2$ .

**Câu 3:** Biết đồ thị hàm số  $y=ax^2$  đi qua điểm  $M(2;-4)$ , khi đó giá trị của hệ số  $a$  là:

- A. 1                      B. -2                      C. -1                      D. 2

**Lời giải**

Chọn **C** vì khi thay  $x=2; y=-4$  vào hàm số  $y=ax^2$  ta có  $-4=a2^2$  suy ra  $a=-1$

**Câu 4:** Điều kiện xác định của biểu thức  $\sqrt{2x-6}$  là:

- A.  $x \leq 3$                       B.  $x \neq 3$                       C.  $x \geq 3$                       D.  $x > 3$

**Lời giải**

Chọn **C** vì  $\sqrt{2x-6}$  xác định khi  $2x-6 \geq 0$  suy ra  $2x \geq 6$  hay  $x \geq 3$ .

**Câu 5:** Biểu thức  $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$  (với  $a \neq b$ ) được rút gọn thành:

- A.  $a - b$       B.  $a + b$       C.  $ab$       D.  $\frac{a}{b}$

**Lời giải**

Chọn **B** vì  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b$  với  $a \neq b$ .

**Câu 6.** Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng  $y = -2x + 1$  ?

- A.  $y = 2x - 1$       B.  $y = 6 - 2(x + 1)$       C.  $y = 2x + 1$       D.  $y = 1 - 2x$

**Lời giải**

Chọn **B** vì đường thẳng  $y = 6 - 2(x + 1) = -2x + 5$  có hệ số  $a = a'$ ;  $b \neq b'$  so với đường thẳng  $y = -2x + 1$  nên chúng song song với nhau.

**Câu 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ . Số đo của  $\angle C$  bằng

- A.  $90^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $30^\circ$

**Lời giải**

Chọn **D** vì trong tam giác vuông  $ABC$  có  $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  suy ra  $\angle C = 30^\circ$

**Câu 8.** Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính  $R$  là

- A.  $S = 4\pi R^2$       B.  $S = 4\pi R$       C.  $S = \frac{4}{3}\pi R^2$       D.  $S = 2\pi R^2$

**Lời giải**

Chọn **A** vì diện tích mặt cầu có bán kính  $r$  là  $S = 4\pi R^2$ .

**Câu 9:** Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số vé không bán được trong 62 buổi chiếu phim:

| Lớp    | [0; 5) | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | Cộng |
|--------|--------|---------|----------|----------|----------|----------|------|
| Tần số | 3      | 8       | 15       | 18       | 12       | 6        | 62   |

Hỏi có bao nhiêu buổi chiếu phim có nhiều nhất 19 vé không bán được?

- A. 42      B. 43      C. 44      D. 45

**Lời giải**

Chọn **C** vì tổng số buổi có nhiều nhất 19 vé không bán được là

$$3 + 8 + 15 + 18 = 44$$

**Câu 10.** Gieo một con xúc xắc. Xác suất để mặt chấm chẵn xuất hiện là?

A. 0,2

B. 0,3

C. 0,4

D. 0,5

**Lời giải**

Chọn **D** vì mặt xuất hiện chấm chẵn là: 2 chấm, 4 chấm, 6 chấm. Xác suất xuất hiện các

chấm này là:  $\frac{3}{6} = 0,5$

II. **PHẦN TỰ LUẬN (7,5 điểm: gồm 7 câu)**

| Câu | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                      | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 11  | Rút gọn biểu thức sau:<br>$M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-6} \quad (x \geq 0; x \neq 9)$                                                                                                    | 1,0  |
|     | Với $x \geq 0; x \neq 9$ $x \geq 0; x \neq 9$ ta có:<br>$M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-6} \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$ | 0,25 |
|     | $= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} M = \frac{x-9+(x-4)-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$                                                                                                 |      |
|     | $= \frac{x-9+x-4-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2x-15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$                                                                                                                                                     | 0,25 |
|     | $\frac{2x-\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$                                                                                                               | 0,25 |
| 12  | Vậy với $x \geq 0; x \neq 9$ thì $M = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \frac{(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$                                                                                                                              | 0,25 |
|     | Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-2y=16 \end{cases}$                                                                                                                                                                                           | 1,0  |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                 |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|    | <p>Nhân phương trình thứ nhất với 2 rồi cộng với phương trình thứ hai ta được:</p> $5x = 30$ <p>Suy ra <math>x = 6</math>. Thay <math>x = 6</math> vào phương trình thứ nhất ta có: <math>6 + y = 7</math></p> <p>Suy ra <math>y = 1</math>.</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm <math>(6;1)</math></p>            | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| 13 | <p>Cho phương trình: <math>x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0</math></p> <p>a) Tìm <math>m</math> để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.</p> <p>b) Tìm <math>m</math> để phương trình có hai nghiệm phân biệt <math>x_1, x_2</math> thỏa mãn :</p> $ x_1 - m  - \sqrt{x_2 + (m - 1)^2} = 0$                            | 1,5                                             |
|    | <p>a) Do <math>a = 1 \neq 0</math> phương trình đã cho là phương trình bậc hai có</p> $\Delta = (2m + 1)^2 - 4.2m = 4m^2 + 4m + 1 - 8m$ $= 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m \geq 0 \text{ với mọi } m$ <p>Để phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt thì <math>m \neq \frac{1}{2}</math>.</p> | 0,75                                            |

b) Từ câu a) ta có với  $m \neq \frac{1}{2}$  phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .  
Theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m & (2) \end{cases}$$

Vì  $x_1$  là nghiệm của phương trình nên  $x_1^2 = (2m + 1)x_1 - 2m$

Ta có  $|x_1 - m| - \sqrt{x_2 + (m - 1)^2} = 0$   $|x_1 - m| - \sqrt{x_2 + (m - 1)^2}$  (ĐK:  $x_2 + (m - 1)^2 \geq 0$ )

$$|x_1 - m| = \sqrt{x_2 + (m - 1)^2}$$

$$|x_1 - m|^2 = (\sqrt{x_2 + (m - 1)^2})^2$$

$$x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_2 + m^2 - 2m + 1 \quad x_2 + (m - 1)^2 \geq 0$$

Mà  $x_1^2 = (2m + 1)x_1 - 2m$  suy ra :

$$2mx_1 + x_1 - 2m - 2mx_1 + m^2 = x_2 + m^2 - 2m + 1$$

Suy ra  $x_1 - x_2 = 1$  (3).

Từ (1) và (3) ta được:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = m + 1 \\ x_2 = m \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được:  $(m + 1)m = 2m$

$$m(m - 1) = 0 \text{ . Suy ra } m = 0 \text{ (t/m) hoặc } m = 1 \text{ (t/m)} \begin{cases} x_1 = m + 1 \\ x_2 = m \end{cases}$$

Vậy  $m = 0$  ;  $m = 1$

0,25

0,25

0,25

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 15 | <p>Một chiếc bánh sinh nhật được thiết kế có hai tầng, tầng phía trên cao <math>15\text{ cm}</math>, bán kính tầng trên là <math>15\text{ cm}</math>, tầng phía dưới cao <math>20\text{ cm}</math>, đường kính tầng dưới là <math>40\text{ cm}</math> (như hình bên).</p> <p>a) Tính thể tích của chiếc bánh.</p> <p>b) Tính diện tích bề mặt để trang trí bánh, biết mặt đáy của bánh sinh nhật không được trang trí ?</p>                                                                                    | 1,25                 |
|    | <p>a) Thể tích của chiếc bánh bằng tổng thể tích của tầng bánh phía trên (<math>V_1</math>) và tầng bánh phía dưới (<math>V_2</math>):</p> $V = V_1 + V_2 = \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 = \pi(r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2)$ $\approx 3,14.(15^2.15 + 20^2.20) = 35717,5(\text{cm}^3)$ <p>Vậy thể tích chiếc bánh là <math>35717,5\text{ cm}^3</math></p>                                                                                                                                                           | 0,25<br>0,25<br>0,25 |
|    | <p>b) Diện tích phần bánh được trang trí bằng tổng diện tích được trang trí của tầng bánh phía trên (<math>S_1</math>) (không tính diện tích đáy dưới) và diện tích được trang trí của tầng bánh phía dưới (<math>S_2</math>) (không tính diện tích đáy dưới và phần hình tròn tiếp xúc với tầng bánh phía trên)</p> $S = S_1 + S_2 = (\pi r_1^2 + 2\pi r_1 h_1) + (\pi r_2^2 + 2\pi r_2 h_2 - \pi r_1^2)$ $= \pi(2r_1 h_1 + 2r_2 h_2 + r_2^2)$ $\approx 3,14(2.15.15 + 2.20.20 + 20^2)$ $= 5181(\text{cm}^2)$ | 0,25<br><br>0,25     |
|    | <p>Vậy diện tích phần trang trí của chiếc bánh là <math>5181\text{ cm}^2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25                 |

Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , cùng phía với nửa đường tròn vẽ  $Ax, By$  lần lượt là các tia tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AO$ . Lấy hai điểm  $P, Q$  nằm trên  $Ax, By$  sao cho  $\widehat{PIQ} = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  lên  $PQ$ .

16

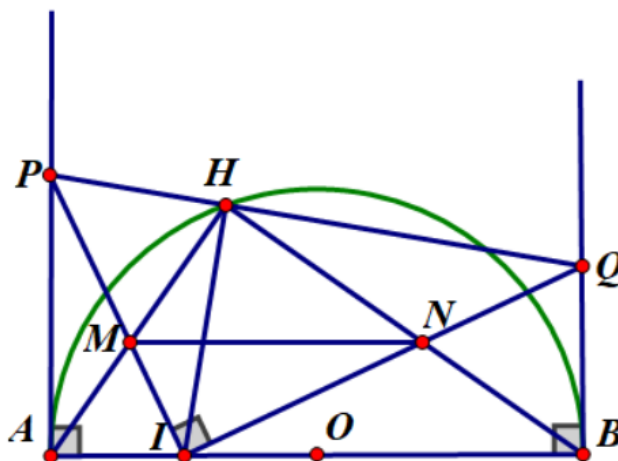
1. Chứng minh tứ giác  $APHI$  nội tiếp.

2. Gọi  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $AH$  với  $PI$  và  $BH$  với  $IQ$ .

Chứng minh  $MN \parallel AB$

3. Chứng minh tích  $AP \cdot BQ$  không đổi. Xác định vị trí các điểm  $P, Q$  trên  $Ax, By$  sao cho diện tích  $\Delta IPQ$  nhỏ nhất.

2,25



1. Chứng minh tứ giác  $APHI$  nội tiếp.

Vì  $AP$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A$  nên  $\angle PAI = 90^\circ$  hay tam giác  $PAI$  vuông tại  $A$ .

0,25

Vậy 3 điểm  $P, A, I$  cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh

0,25

$PI$  và bán kính là  $\frac{PI}{2}$ . (1)

0,25

Tương tự ta cũng chứng minh được 3 điểm  $P, H, I$  cùng thuộc đường tròn

có tâm là trung điểm của cạnh  $PI$  và bán kính là  $\frac{PI}{2}$ . (2)

0,25

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm  $P, A, I, H$  cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác  $APHI$  nội tiếp được.

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                     |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
|    | <p>2. Gọi <math>M, N</math> lần lượt là giao điểm của <math>AH</math> với <math>PI</math> và <math>BH</math> với <math>IQ</math>.<br/>         Chứng minh <math>MN \parallel AB</math></p> <p>Từ câu 1) ta có <math>APHI</math> là tứ giác nội tiếp suy ra <math>\widehat{PAH} = \widehat{IPH}</math> (2 góc nội tiếp cùng chắn <math>\widehat{PH}</math>) <math>\widehat{IAH} = \widehat{IPH}</math></p> <p>Tương tự ta cũng có <math>BQHI</math> là tứ giác nội tiếp</p> <p>Suy ra <math>\widehat{PBH} = \widehat{IQH}</math> <math>\widehat{IBH} = \widehat{IQH}</math> (2 góc nội tiếp cùng chắn <math>\widehat{IH}</math>) <math>\widehat{IAH} = \widehat{IPH}</math></p> <p><math>\triangle AHB \sim \triangle PIQ</math> mà <math>\angle PIQ = 90^\circ</math> nên <math>\angle AHB = 90^\circ</math> suy ra <math>H \in (O)</math> và tứ giác <math>MHNI</math> nội tiếp.</p> <p>Do đó <math>\Rightarrow \widehat{HNM} = \widehat{HIM} = \widehat{HAP}</math> <math>\widehat{HNM} = \widehat{HIM} = \widehat{HAP}</math> <math>\widehat{HAP} = \widehat{HBA}</math> mà <math>\widehat{HAP} = \widehat{HBA}</math> suy ra <math>\widehat{HNM} = \widehat{HBA}</math></p> <p>mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên <math>MN \parallel AB</math>.</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
|    | <p>Ta có: <math>\triangle API \sim \triangle BIQ</math> Ta có <math>\triangle API \sim \triangle BIQ</math> (g-g)</p> <p>Suy ra: <math>\frac{AP}{BI} = \frac{AI}{BQ}</math> nên <math>AP \cdot BQ = AI \cdot BI</math> không đổi.</p> <p><math>S_{\triangle PIQ} = \frac{1}{2} IP \cdot IQ = \frac{1}{2} \sqrt{AP^2 + AI^2} \cdot \sqrt{BQ^2 + BI^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2AP \cdot AI} \cdot \sqrt{2BQ \cdot BI}</math></p> <p><math>= \sqrt{AP \cdot BQ \cdot AI \cdot BI} = AI \cdot BI = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}</math></p> <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>AP = AI; BQ = BI</math> <math>AP = AI, BQ = BI</math>.</p> <p>Vậy diện tích tam giác <math>PIQ</math> <math>S_{\triangle PIQ}</math> đạt GTNN bằng <math>\frac{3R^2}{4}</math> khi <math>AP = AI; BQ = BI</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>0,25</p> <p>0,25</p>             |
| 17 | <p>Cho ba số dương <math>a, b, c</math> thỏa mãn <math>ab + bc + ca = 1</math>.</p> <p>Chứng minh rằng:</p> $\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} + \frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} + \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5                                 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                         |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|  | <p>Ta luôn có <math>a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(c + a)</math></p> <p>Do đó <math>\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{(a + b)(c + a)}</math></p> <p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có</p> $\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} = \frac{\sqrt{(a + b)(c + a)} - a}{bc} \leq \frac{\frac{2a + b + c}{2} - a}{bc} = \frac{b + c}{2bc} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ <p>Chứng minh tương tự ta cũng có:</p> $\frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ $\frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ $\frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ <p>Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:</p> $\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} + \frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} + \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}</math>.</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|