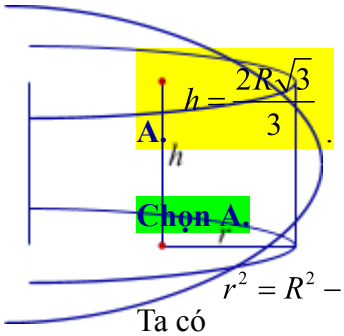
Câu 45. **[2H2-2.5-3] (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018)** Cho khối cầu (S) tâm I, bán kính R không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao h và bán kính đáy r nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



A. $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=R\sqrt{2}$.

Lời giải.

Chọn A.

Ta có $r^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ: $V=\pi\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)h \Leftrightarrow V=\pi R^2h-\dfrac{\pi h^3}{4}$.

Ta có $V'=\pi R^2-\dfrac{3\pi}{4}h^2$, $\Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	0		$\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	V_{max}	$\searrow$	

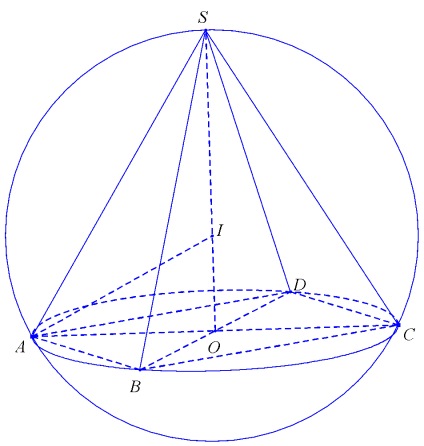
Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37. **[2H2-2.5-3] (SỞ GD -ĐT HẬU GIANG -2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng 9. Tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $144\sqrt{6}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $576\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính $R=9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a $\left(0<a\le 9\sqrt{2}\right)$.

Ta có $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OI=\sqrt{IA^2-OA^2}=\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Mặt khác ta lại có $SO=SI+IO=9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}a^2\left(9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}\right)=3a^2+\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$. Đặt $a^2=t$, do $0<a\le 9\sqrt{2}$ nên $0<t\le 162$. Xét hàm số $f(t)=3t+\dfrac{1}{3}t\left(\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}\right)$, với $0<t\le 162$ ta có $f'(t)=3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}$;

Giải phương trình $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}=\dfrac{t}{12}-9\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\81-\dfrac{t}{2}=\left(\dfrac{t}{12}-9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\\left[\begin{array}{l}t=0\\t=144\end{array}\right.\end{cases}$ $\Leftrightarrow t=144$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	576	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp nội tiếp hình cầu cầu có bán kính bằng 9 là $V=576$.