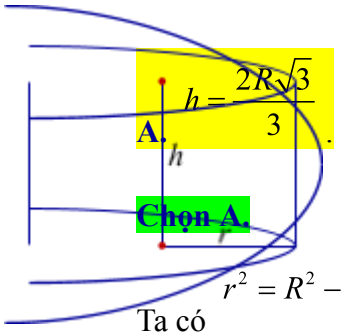
**Câu 45.** **[2H2-2.5-3] (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018)** Cho khối cầu $(S)$ tâm $I$, bán kính $R$ không đổi. Một khối trụ thay đổi có chiều cao $h$ và bán kính đáy $r$ nội tiếp khối cầu. Tính chiều cao $h$ theo $R$ sao cho thể tích của khối trụ lớn nhất.



**A.** $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=R\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Ta có $r^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

Thể tích của khối trụ: $V=\pi\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)h \Leftrightarrow V=\pi R^2h-\dfrac{\pi h^3}{4}$.

Ta có $V'=\pi R^2-\dfrac{3\pi}{4}h^2 \Rightarrow V'=0\Leftrightarrow h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$,

Bảng biến thiên:

| $h$ | $0$ | | $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V$ | | ↗ | $V_{\max}$ | ↘ | |

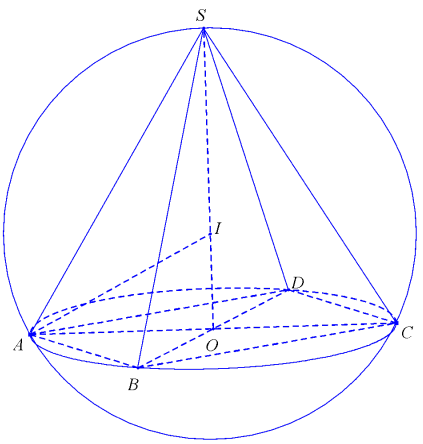
Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $h=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 37.** **[2H2-2.5-3] (SỞ GD -ĐT HẬU GIANG -2018)** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu có bán kính bằng $9$. Tính thể tích $V$ của khối chóp có thể tích lớn nhất.

**A.** $144\sqrt{6}$. **B.** $144$. **C.** $576$. **D.** $576\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**



Gọi $(S)$ là mặt cầu có tâm $I$ và bán kính $R=9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, cạnh $a$ $\left(0<a\le 9\sqrt{2}\right)$.

Ta có $OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OI=\sqrt{IA^2-OA^2}=\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Mặt khác ta lại có $SO=SI+IO=9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}a^2\left(9+\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}\right)=3a^2+\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{81-\dfrac{a^2}{2}}$. Đặt $a^2=t$, do $0<a\le 9\sqrt{2}$ nên $0<t\le 162$. Xét hàm số $f\left(t\right)=3t+\dfrac{1}{3}t\left(\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}\right)$, với $0<t\le 162$ ta có $f'\left(t\right)=3+\dfrac{324-3t}{12\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}}$;

Giải phương trình $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{81-\dfrac{t}{2}}=\dfrac{t}{12}-9\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\81-\dfrac{t}{2}=\left(\dfrac{t}{12}-9\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 108\\\left[\begin{array}{l}t=0\\t=144\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow t=144$.

Ta có bảng biến thiên

| $t$ | 0 | | 144 | | 162 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f\left(t\right)$ | | ↗ | $576$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp nội tiếp hình cầu cầu có bán kính bằng $9$ là $V=576.$