مسألة إدماجية

1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

1) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

2) قارن $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$) .

2) علم على المستقيم العددي النقط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ ؟

3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتاج السابقة حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال 2) ؟

الحل :

1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

1) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

نميز حالتين :

إذا كان : $0 < a < \sqrt{2}$ فإن : $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$ ولدينا : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن : $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$

وبالتالي : $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$

إذا كان : $a > \sqrt{2}$ فإن : $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\frac{2}{a} < \frac{2}{\sqrt{2}}$ ولدينا : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن : $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$

وبالتالي : $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$

2) قارن $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$) .

$$\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})-\sqrt{2} = \frac{a^2+2-2a\sqrt{2}}{2a} = \frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}$$

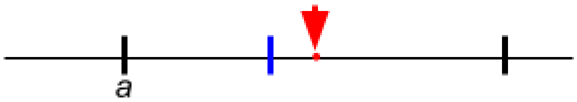
بما أن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

فإن : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})-\sqrt{2} > 0$ ومنه : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) > \sqrt{2}$

2) علم على المستقيم العددي النقط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ ؟

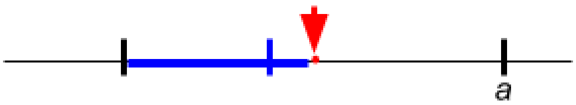
في حالة : $0 < a < \sqrt{2}$



$\sqrt{2} \in]a\ ;\ \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})[$

في حالة : $a > \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in]\frac{2}{a}\ ;\ \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})[$



3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتاج السابقة حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال 2) ؟

بتعويض a بالعدد 1 نجد : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})=\frac{3}{2}$ وبالتالي : $1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ أي : $\sqrt{2} \in]1\ ;\ \frac{3}{2}[$

بتعويض a بالعدد $\frac{3}{2}$ نجد : $\frac{2}{a}=\frac{4}{3}$ و $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3})=\frac{17}{12}$ وبالتالي : $\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$

أي : $\sqrt{2} \in]\frac{4}{3}\ ;\ \frac{17}{12}[$

طول المجال $]\frac{4}{3}\ ;\ \frac{17}{12}[$ هو $0,08\underline{3}$ وطول المجال $]1\ ;\ \frac{3}{2}[$ هو $0,5$

إذن $\sqrt{2} \in]\frac{4}{3}\ ;\ \frac{17}{12}[$ هو أفضل حصر لأن طول هذا المجال هو الأصغر.