



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024/2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES
Tiempo: 1 HORA Y 30 MINUTOS

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas, respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

- (0,5 PUNTOS) Plantea el problema de programación lineal que permita calcular cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio
- (0,5 PUNTOS) Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS) Indica cuáles son las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS) Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

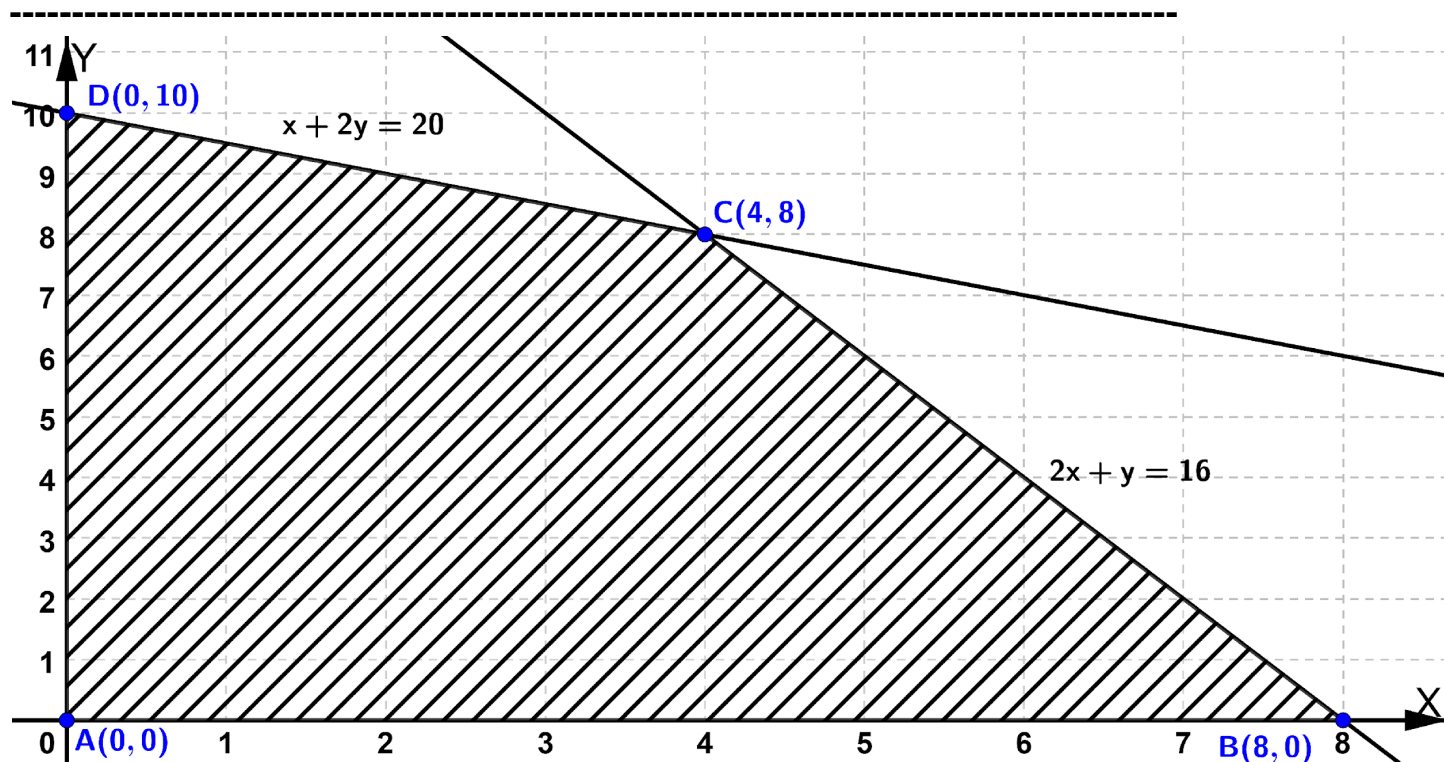
Las

	nº de armarios	horas para construcción	horas de pintura	beneficio (en €)
modelo A	x	3x	4x	200x
modelo B	y	6y	2y	300y
total	x + y	3x + 6y	4x + 2y	200x + 300y

restricciones son $\{3x + 6y \leq 60 \rightarrow x + 2y \leq 20$ $4x + 2y \leq 32 \rightarrow 2x + y \leq 16$ $x \geq 0, y \geq 0$.

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 200x + 300y$

Dibujamos los ejes de coordenadas, hacemos la escala adecuada y dibujamos el recinto solución



Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo el beneficio $f(x, y) = 200x + 300y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0 \quad f(B) = f(8, 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600$$

$$f(C) = f(4, 8) = 200 \cdot 4 + 300 \cdot 8 = 3200 \quad f(D) = f(0, 10) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$$

El beneficio máximo es 3200 € y se consigue fabricando y vendiendo 4 armarios tipo A y 8 tipo B

EJERCICIO 2

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2):

(Opción 1)

2.1. a) (1 PUNTO) Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & k \\ -5 & \end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$$A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$\text{Sustituyendo, } \begin{pmatrix} 5 & 3 & k \\ -5 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & k \\ -5 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (25 + 3k \ 0 \ 0 \ 25 + 3k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Igualando elementos, } 25 + 3k = 1, 3k = -24, k = -8$$

b) (1 PUNTO) Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$.

Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución

Sustituyendo,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -15 & 12 & -12 \\ -20 & 20 & -15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Al ser $B^2 = I_2$, resulta que $\exists B^{-1} = B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$. Multiplicando por B, por la izquierda, en los dos

miembros:

$$BBX = B^2X = I_2X = B \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 15 & 34 & -19 & -43 \end{pmatrix}$$

(Opción 2)

2.2 Dadas las matrices $A = \frac{1}{5}(3 \ - \ 4 \ 4 \ 3)$ y $B = (5 \ 10 \ 0 \ 20)$, se pide:

a) (0,5 PUNTOS) Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$

Resolución Sustituyendo, $AA^T = \frac{1}{5}(3 \ - \ 4 \ 4 \ 3) \frac{1}{5}(3 \ 4 \ - \ 4 \ 3) = \frac{1}{25}(25 \ 0 \ 0 \ 25) = (1 \ 0 \ 0 \ 1) = I_2$

b) (1,5 PUNTOS) Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$

(A^T representa la matriz traspuesta de A)

Resolución

Trasponiendo términos, $XA = BA - B$. Como $AA^T = I_2$, $\exists A^{-1} = A^T$. Multiplicando por A^T , por la derecha,

en los dos miembros:

$$XAA^T = XI_2 = (BA - B)A^T \Rightarrow X = \left[(5 \ 10 \ 0 \ 20) \frac{1}{5}(3 \ - \ 4 \ 4 \ 3) - (5 \ 10 \ 0 \ 20) \right] \frac{1}{5}(3 \ 4 \ - \ 4 \ 3)$$

$$X = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{5}(55 \ 10 \ 80 \ 60) - (5 \ 10 \ 0 \ 20) \right] (3 \ 4 \ - \ 4 \ 3) = \frac{1}{5}(6 \ - \ 8 \ 16 \ - \ 8)(3 \ 4 \ - \ 4 \ 3) = \frac{1}{5}(50 \ 0 \ 80 \ 40) \Rightarrow$$

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a: número real). Se pide:

a) (1 PUNTO) Calcula el valor de "a" para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36$. Al ser la recta tangente en $x = 2$ la recta horizontal $y = 37$, entonces $f'(2) = 0$.

Luego, $3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + 36 = 0 \Rightarrow 4a + 48 = 0 \Rightarrow a = -12$. Queda $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$; $f''(x) = 6x - 24$;

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en $x = 2$

b) (1 PUNTO) Calcula el valor de "a" para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36$; $f''(x) = 6x + 2a$. Según el enunciado, debe haber una inflexión en $x = 5$.

Luego, $0 = f''(5) = 6 \cdot 5 + 2a \Rightarrow a = -15$

c) (1 PUNTO) Qué valor debe tomar "a" para que se verifique la igualdad: $\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36)dx = 152$

Resolución

Una primitiva de $(3x^2 + 2ax + 36)$ es $p(x) = x^3 + ax^2 + 36x$. Por la regla de Barrow,

$$152 = \int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36)dx = p(4) - p(2) = 4^3 + a4^2 + 36 \cdot 4 - (2^3 + a2^2 + 36 \cdot 2) = 12a + 128$$

Despejando, $12a = 152 - 128 = 24$. El valor debe ser $a = 2$

(Opción 2)

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función: $f(t) = t^3 - 3t + 10$, con $0 \leq t \leq 6$ (t : meses transcurridos desde el inicio del estudio). Se pide:

a) (1,25 PUNTOS) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuándo los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$, e indica cuando se han alcanzado.

Resolución

Para $0 \leq t \leq 6$, $f'(t) = 3t^2 - 3 = 0$. Y como $t \geq 0$, debe ser $t = 1$

Hagamos una tabla de signos de $f'(t)$:

	$(0, 1)$	1	$(1, 6)$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	decreciente	mínimo	creciente

$f(t)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, 6)$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 10 = 10, f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 10 = 8, f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6 + 10 = 208$$

El máximo ingreso fue de 208 000 € a los 6 meses y el mínimo ingreso fue 8 000 €, transcurrido 1 mes

b) (0,25 PUNTOS) Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros

Resolución

Para $0 \leq t \leq 6$ hay que ver cuando $f(t) = t^3 - 3t + 10 = 12$. O sea, $t^3 - 3t - 2 = 0$

Factoricemos usando la regla de Ruffini:

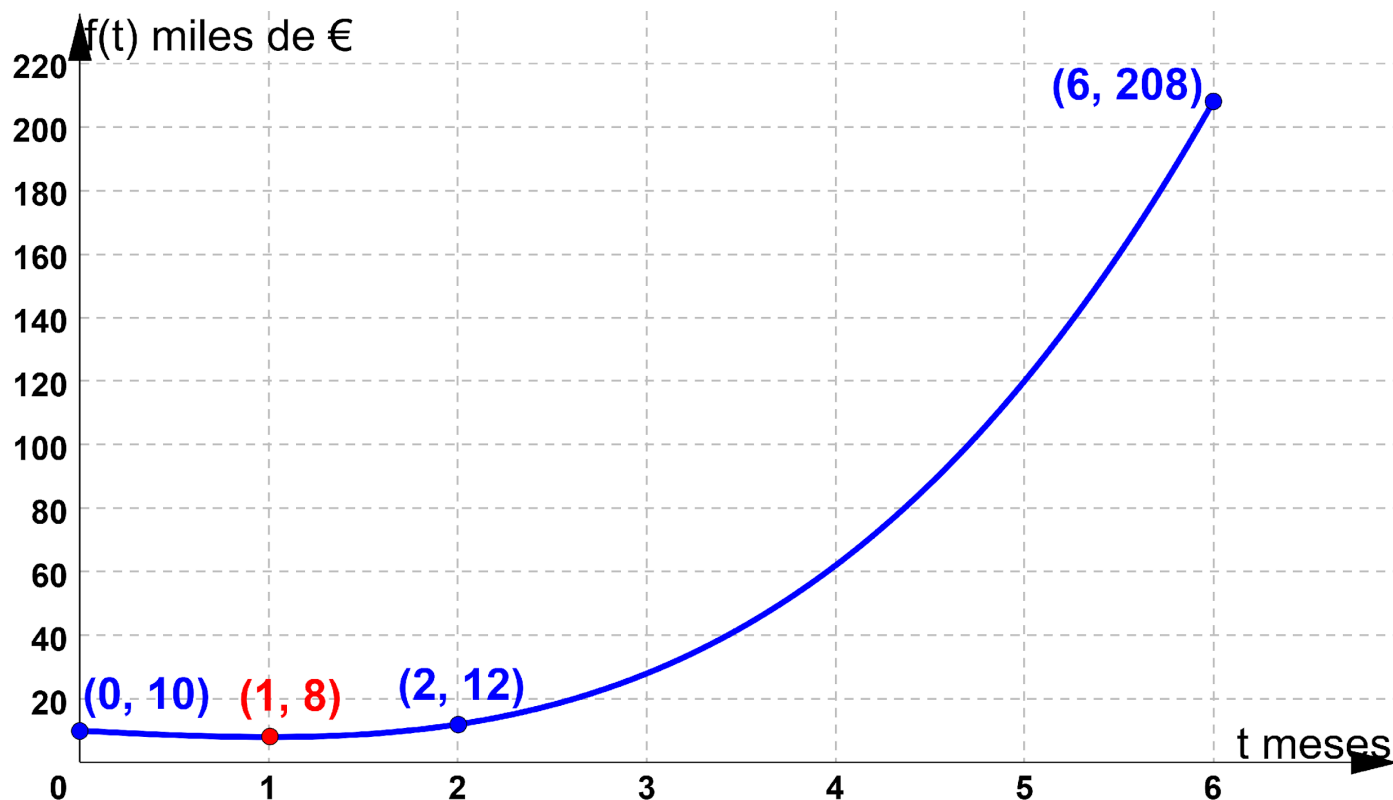
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & -4 \end{array} ; (t+1)(t^2-t-2) = 0 \Rightarrow t = -1, t = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \text{Soluciones: } t = -1, t = 2$$

Y como $0 \leq t \leq 6$, debe ser $t = 2$. O sea, a los 2 meses

c) (0,75 PUNTOS) Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.

Resolución

Usando los apartados anteriores, la gráfica es



d) (0,75 PUNTOS) Calcula en que punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

Resolución

Sea $P(t, f(t))$ el punto que se pide. Sabemos que para $0 \leq t \leq 6$, $f(t) = t^3 - 3t + 10$

Como $f'(t)$ representa la pendiente de la recta tangente, $f'(t) = 3t^2 - 3 = 9 \Rightarrow t^2 = 4$.

Y como t es positivo, entonces $t = 2$, $f(2) = 12$. El punto es $P(2, 12)$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en $A(t_0, f(t_0))$

es $\text{rtg: } y = f'(t_0)(t - t_0) + f(t_0)$. En este caso, $\text{rtg: } y = 9(t - 2) + 12$; $\text{rtg: } y = 9t - 6$

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2):

Opción 1

4.1. Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C, que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas. Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina, Se pide:

- (1,25 PUNTOS) ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?
- (0,5 PUNTOS) ¿Son independientes los sucesos "moto fabricada en la planta B" y "moto de gasolina"?
- (1,25 PUNTOS) Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica)

Resolución

A = la moto es fabricada en la planta A B = la moto es fabricada en la planta B

C = la moto es fabricada en la planta C G = la moto es de gasolina D = la moto es eléctrica

Construimos la siguiente tabla de porcentajes/probabilidades:

	G	D	Total
A	$35\% - 5,25\% = 29,75\%$	$40\% - 8,75\% - 26\% = 5,25\%$	35%
B	$65\% \text{ del } 25\% = 16,25\%$	$25\% - 16,25\% = 8,75\%$	25%
C	$60\% - 29,75\% - 16,25\% = 14\%$	$65\% \text{ del } 40\% = 26\%$	40%
Tota l	60%	$100\% - 60\% = 40\%$	100 %

a) Se pide

$$p\left(\frac{G}{A}\right) = \frac{p(G \cap A)}{p(A)} = \frac{29,75\%}{35\%} = \frac{29,75}{35} = 0,85 = 85\%$$

b) $p(B)p(G) = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15 \neq p(B \cap G) = 0,1625 \Rightarrow B \text{ y } G \text{ NO son independientes, son dependientes.}$

c) Piden $p\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{p(D \cap B)}{p(D)} = \frac{8,75\%}{40\%} = \frac{8,75}{40} = 0,21875 = 21,875\%$

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B):

A) (1 PUNTO) De dos sucesos A y B sabemos que $p(A) = \frac{1}{4}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $p(B)$, $p(A \cup B)$, $p(A/B)$ y $p(\bar{A}/B)$ ($\bar{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

Resolución

1) Al ser A y B independientes, $p(A) p(B) = p(A \cap B) \Rightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

3) $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

4) $p(\bar{A}/B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) (1 PUNTO) Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ .

Resolución

$X = \text{duración (en horas)} \rightarrow N(\mu, 250)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para estimar la duración media, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 2000$ la media de la muestra de tamaño

$n = 100$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1)$ por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 49 ; I_c = (2000 - 49 ; 2000 + 49) \cong (1951 ; 2049)$$

B.2) (1 PUNTO) Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

Resolución

Piden hallar n para que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 20 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{20} < \sqrt{n}$ elevando al cuadrado $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{20^2} < n$

Sustituyendo: $n > 1,96^2 \cdot \frac{250^2}{20^2} = 600,25 \Rightarrow$ el tamaño mínimo de la muestra debe ser 601 bombillas