

1 Тур (10 минут, каждая задача по 5 баллов)

1.1 Съев на пустой желудок семерых козлят и трёх поросят, Серый Волк всё ещё страдал от голода, но съев в другой раз на пустой желудок семерых поросят и козлёнка, Волк страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок одиннадцать козлят?

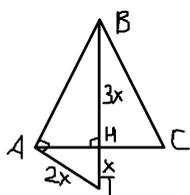
Решение: Если семь козлят и три поросёнка сытнее семерых поросят и козлёнка, четыре поросёнка сытнее шести козлят. Тогда три поросёнка сытнее четырёх козлят. А из этого семь козлят и три поросёнка сытнее одиннадцати козлят, и Волк пострадает от голода.

Ответ: от голода.

Критерии: Приведено только первое предложение - 1 балл, приведено второе – 3 балла.

Только ответ – 0.

1.2 В равностороннем треугольнике ABC провели высоту BH . На продолжении луча BH за точку H взяли точку T , что $\angle BAT = 90^\circ$. Найдите AT , если $BH = 15$.



Решение: Посчитаем углы. $\angle ABT = 30^\circ$ (т.к. высота в равнобедренном треугольнике является биссектрисой), $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle NAT = \angle BAT - \angle CAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Обозначим AT за $2x$. Тогда, т.к. $\triangle AHT$ – прямоугольный с углом в 30° , $HT = 0.5 * AT = x$.

Аналогично, в $\triangle BAT$, $BT = 2 * AT = 4x$. Тогда $BH = 3x$, и $x = 5$.

Ответ: 10.

Критерии: Посчитали углы – 1 балл, вспомнили про угол в 30° – ещё 1 балл.

1.3 Папа, мама и несколько детей обедали за круглым столом и ели вареники из большой кастрюли. Каждый съел или вдвое больше, или на четыре вареника меньше, чем его сосед справа. Докажите, что если в кастрюле был изначально 101 вареник, то и после обеда вареники в кастрюле ещё остались.

Решение: Если бы никто не съел вареников вдвое больше своего соседа, то каждый следующий съел бы вареников меньше своего соседа, а тогда при проходе полного круга получается, что человек съел меньше вареников, чем он съел. Тогда хоть кто-то съел вдвое больше вареников, чем сосед. Тогда он съел чётное число вареников, его сосед – тоже чётное число, следующий сосед – тоже чётное число и так далее... Тогда все съели чётное число вареников. А значит, общая сумма тоже должна была быть чётной и не могла равняться 101.

Критерии: Сказано про чётность – 2 балла.

2 Тур (15 минут, каждая задача по 6 баллов)

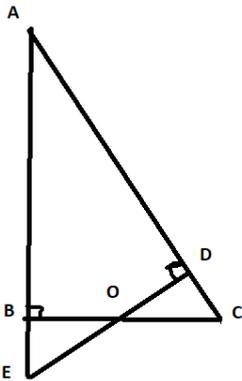
2.1 В 7 "А" классе учатся не более 50 учеников, среди которых есть несколько Вась. $3/7$ всех учеников в классе выше всех Вась, а $2/5$ всех учеников в классе ниже всех Вась. Какое наибольшее число Вась может учиться в 7 "А" классе?

Решение: Посчитаем, сколько всего учеников было в классе. Если из него можно выбрать $3/7$ и $2/5$, то оно делится на 7 и на 5, а тогда и на 35, то есть равно 35. $35 * 3/7 = 15$ человек в

классе выше всех Вась, то есть точно не Васи. Аналогично, $35 * 2/5 = 14$ человек в классе ниже всех Вась, то есть тоже точно не Васи. А тогда Вась могло быть не более шести. Пример строится очевидно.

Критерии: В классе 35 учеников – 2 балла; рассуждение, что Вась в классе не более $6/35$ от всех без дальнейших продвижений – 3 балла.

2.2 Однажды Маша забыла взять с собой в школу циркуль и линейку, зато взяла угольник с углами 30° , 60° и 90° . На уроке геометрии Машу попросили построить угол величиной в 15° . Помогите Маше справиться с этим заданием.



Приложим угольник и обведём. Получится треугольник ABC. Перевернём угольник, приложим его меньшим углом в точку A и снова обведём. Получится треугольник ADE. Так как $AO < AE$, соединим их. Осталось доказать, что $\angle EAO$ равен 15° . В силу симметрии или равенства треугольников ABO и ADO по трём сторонам, AO – биссектриса, из чего и получаем требуемый угол.

Критерии: Приведено построение, но не доказана его верность – 4 балла.

2.3 В одном классе у каждого ученика хотя бы двое друзей. Все друзья Васи дружат между собой, а все друзья Пети не дружат между собой. Дружат ли друг с другом Вася и Петя?

Решение: Предположим, что Вася и Петя дружат. Пусть Вася дружит ещё с Толей. Тогда, так как Вася дружит с Петей и Толей, Петя и Толя дружат. Но тогда, так как Петя дружит с Васей и Толей, Вася и Толя не дружат. Получаем противоречие. Значит, Вася и Петя не могут дружить.

Ответ: не дружат.

Критерии: 6/0.

3 Тур (15 минут, каждая задача по 7 баллов)

3.1 В семь утра из Ёлкино в Палкино выехали медведи на велосипеде, а из Палкино в Ёлкино – раки на хромой собаке. Едут и смеются, пряники жуют. Когда медведи и раки встретились, оказалось, что медведи съели пряников вдвое больше, чем раки. За всю дорогу медведи съели столько же пряников, сколько и раки. В семь вечера медведи стали возвращаться из Палкино в Ёлкино на хромой собаке, а раки – из Ёлкино в Палкино на велосипеде. На обратной дороге раки съели 20 пряников. А сколько пряников съели медведи?

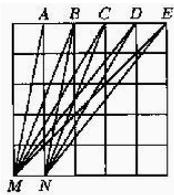
(Скорость путешествующих зависит только от вида транспорта, а скорость поедания пряников зависит от вида путешествующих.)

Решение: Если когда медведи и раки встретились, медведи съели вдвое больше пряников, чем раки, то медведи едят пряники вдвое быстрее, чем раки (так как ехали они одинаковое время). Если медведи за всю дорогу съели пряников столько же, сколько и раки, то едут они на велосипеде тоже вдвое быстрее раков на хромой собаке. Тогда когда медведи пересядут на хромую собаку, они будут ехать домой вдвое дольше, чем раки на велосипеде, а есть вдвое быстрее, то есть суммарно съедят вчетверо больше, чем раки.

Ответ: 80 пряников.

Критерии: Первое предложение – 1 балл, первые два предложения – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

3.2 На клетчатой бумаге нарисована картинка. С помощью транспортира Серёжа посчитал углы MAN , MBN , MCN , MDN и MEN , а потом нашёл их сумму. Найдите эту сумму



и вы.

Решение: Перестроим все углы так, чтобы их вершины лежали в точке E. Тогда угол MEN (N – правый нижний угол квадрата) будет как раз равен сумме искомых углов, а он равен 45° .

Ответ: 45° .

Критерии: Только ответ – 1 балл.

3.3 У Наташи были четыре кота, весивших 11, 12, 14 и 15 кг соответственно. Однажды в гости к Наташе пришла Верочка и принесла с собой чашечные весы без гирь. Помогите Верочке за четыре взвешивания на её весах определить, какой из котов сколько весит.

Решение: Сначала тремя способами разобьём котов на две группы по двое и взвесим эти группы между собой. Во время этих трёх взвешиваний дважды перевесила группа с самым тяжёлым котом и дважды недовесила группа с самым лёгким котом (в третий раз было равновесие). Осталось взвесить оставшихся двух и определить, какой из них тяжелее.

Критерии: 7/0, но смотрим по ситуации.

4 Тур (20 минут, каждая задача по 8 баллов)

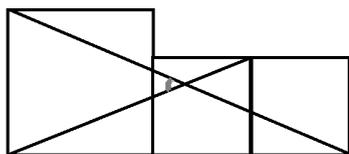
4.1 В саду пана Козла растут вишни и черешни, под одной из вишен спит кот. На каждой вишне сидит по три скворца и два дрозда, а на каждой черешне два скворца и пять дроздов. В один прекрасный момент кот проснулся, запрыгнул на вишню и съел одну из птиц. А остальные птицы улетели. Через полчаса они вернулись. На каждую черешню село по семь скворцов (и ни одного дрозда), а на каждую вишню кроме той, на которой сидит кот, село по шесть дроздов (и ни одного скворца). Сколько скворцов и сколько дроздов сидело в саду пана Козла первоначально?

Решение: До прыжка кота на каждой вишне сидело по 5 птиц, а после прыжка кота стало сидеть по 6 птиц. Число птиц, сидящих на черешнях, не изменилось. Значит, если мы обозначим число вишен за x , получим уравнение: $5x - 1 = 6(x-1)$ (одну птичку жалко, в память о ней птички на одной из вишен не сидят). Находим $x = 5$. Тогда после прыжка кота на вишнях сидело $6 * (5-1) = 24$ дрозда. Вспомним, что изначально на вишнях сидело по два дрозда (всего $2 * 5 = 10$ дроздов), а на черешнях - по пять дроздов. Тогда на черешнях должно было сидеть не менее $24 - 10 = 14$ дроздов, то есть не менее 15 (т.к. число должно делиться на 5). Значит, черешен было три. Тогда исходно на деревьях сидело 25 дроздов и 21 скворец.

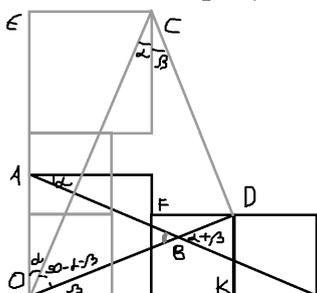
Ответ: 21 скворец, 25 дроздов.

Критерии: Только ответ – 1 балл, ответ с проверкой (полной) – 2 балла; идея посчитать общее число птиц – 2 балла.

4.2 Коля нарисовал квадрат, а рядом с ним ещё два одинаковых, но меньшие. Найдите угол,



указанный на рисунке.



Решение: Сделаем такое дополнительное построение: слева два маленьких квадрата, а на них – большой квадрат. Обозначим искомый угол за $\alpha + \beta$, а углы при вершинах А и О – за α и β соответственно. Теперь перенесём угол α по построению к вершине С, а потом по параллельности к вершине О новых квадратов. $\triangle CFD = \triangle OKD$ (по двум катетам), а тогда и углы β равны. Теперь пусть сторона большого квадрата равна p , а малого – q . По теореме Пифагора, $OC^2 = p^2 + 4q^2 + 4pq + p^2$. $OD^2 + DC^2 = 2*(p^2 + 2pq + q^2)$. Тогда, по обратной теореме Пифагора, $\triangle OCD$ – прямоугольный (и т.к. $OD^2 = CD^2$, ещё и равнобедренный). А тогда $\alpha + \beta = 45^\circ$, что и есть искомый угол.

Ответ: 45° .

Критерии: Счёт в координатах – 8/0. Только ответ – 1 балл. Рассмотрение частного случая – не более 2 баллов.

4.3 Каждый день баба Поля рассказывает столько сплетен, сколько раз Настя в этом месяце уже вставала с левой ноги, а баба Валя рассказывает столько сплетен, сколько дней в месяце (включая текущий) уже прошло, но только если Настя встала в этот день с правой ноги, а в остальные дни сплетни не рассказывает. В сентябре Настя 15 раз встала с левой ноги и 15 раз - с правой. Докажите, что за сентябрь баба Поля рассказала столько же сплетен, сколько и баба Валя.

Решение: Пусть a_1, a_2, \dots, a_{15} – номера тех дней, когда Настя встала с правой ноги. Тогда баба Валя рассказала ровно $a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$ сплетен. Пусть b_1, b_2, \dots, b_{15} – номера дней, когда Настя вставала с левой ноги. Тогда после первого из этих дней баба Поля рассказывала по одной сплетне за этот день, после второго – каждый день по сплетне за второй день и так далее. Значит, она рассказала $(31 - b_1) + (31 - b_2) + \dots + (31 - b_{15})$ сплетен, что равно $31 * 15 - b_1 - \dots - b_{15}$. Но это равно $a_1 + \dots + a_{15}$, т.к. $a_1 + \dots + a_{15} + b_1 + \dots + b_{15} = 1 + 2 + \dots + 30 = 31 * 30 / 2 = 31 * 15$.

Критерии: Рассмотрение частных случаев (+ идея подвигать дни, но не доведена до конца) – 3 балла.