

1.- Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a & b & c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Determina a , b y c , sabiendo que $AB = C$ y la matriz A tiene rango 2.

Resolución

Si $AB = C \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a & b & c & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 + 1 + 1 + a + b + c + 1 + 4) = (3 \ 2 \ 1) \Rightarrow (3 + a + b + c + 5)$$

Obtenemos $\{a + b + c = -4\}$.

Como $\text{rg } A = 2$, debe ser $\det A = 0$. Hallamos $\det A$ usando la regla de Sarrus:

$$\det A = 4a + bc + 1 - ac - 4 - b. \text{ Al ser } c = -4, \det A = 4a - 4b + 1 + 4a - 4 - b = 8a - 5b - 3 = 0$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} a + b + c = -4 \\ 8a - 5b - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 8a - 5b = 3 \Rightarrow 5a + 5b = 5(8a - 5b) = 3 \cdot 5 = 15$

Sumando las ecuaciones, $13a = 8, a = \frac{8}{13}$. Sustituyendo en la 1ª ecuación

$$\frac{8}{13} + b + c = -4 \rightarrow b + c = -4 - \frac{8}{13} = -\frac{52}{13} - \frac{8}{13} = -\frac{60}{13}$$

Por tanto, $a = \frac{8}{13}, b = -\frac{5}{13}$ y $c = -4$

2.- Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas $\begin{cases} x + \lambda y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$. Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

Resolución

matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 & 2 & 4 & 1 & \lambda & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A^*) = 8\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda - 4\lambda^2 - 1 = -3\lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 1, \lambda \neq -1 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$, porque $\det(A^*) \neq 0$, $\text{rg}(A) < 3$, porque A tiene sólo 2 columnas

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $\text{rg}(A^*) \neq \text{rg}(A)$: Sistema incompatible (no tiene solución)

Si $\lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(A) = 2$, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; F_3 =,$$

eliminamos F_3 y $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}) = 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, SCD (tiene solución única)

$$\text{Matriz del sistema: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}, x + \frac{-3}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 + \frac{3}{2}, x = \frac{7}{2}$. La solución es

$$x = \frac{7}{2}, y = -\frac{3}{2}$$

Si $\lambda = -1, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rg}(A) = 2$, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

como $F_3 = -F_1$, $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}) = 2$, porque $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, SCD (tiene solución única)

Matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = -F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda $\{x - y = 2 \text{ } 6y = -3 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}, x - \frac{-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$. La solución es $x = \frac{3}{2}, y = \frac{-1}{2}$

3.- Considera el sistema de ecuaciones $\{ax + y + z = 1 \text{ } x + ay + z = a \text{ } x + y + az = a^2$
a) Discútelos según los valores de a.

Resolución

matriz de coeficientes: $A = (a \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } a \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } a)$; matriz ampliada: $A^* = (a \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } a \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } a \text{ } a^2)$
 $\det(A) = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow 1 \text{ } 0 \text{ } -3 \text{ } 2 \text{ } 1 \downarrow 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 0 \Rightarrow (a - 1)(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ } \text{ ó } \text{ } a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -2$

Si $a \neq 1, a \neq -2$

$\Rightarrow \{rg(A) = 3 \text{ porque } \det(A) \neq 0 \text{ } rg(A^*) = 3 \text{ porque } A^* \text{ contiene a } A \text{ y no puede ser } 4 \text{ pues sólo tiene } 3 \text{ filas}\}$
Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A^*) = rg(A) = n^\circ$ de incógnitas, SCD (tiene solución única)

$a = 1, A = (1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1)$, $rg(A) = rg(1 \text{ } 1 \text{ } 1) = 1$;

$A^* = (1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1)$, $rg(A^*) = rg(1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1) = 1$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A) = rg(A^*) = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Es un SCI (tiene infinitas soluciones)

Si $a = -2, A = (-2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2)$, $rg(A) = 2$, porque $\det(A) = 0$ y el menor $|-2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2| = 3 \neq 0$

$$A^* = (-2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 4).$$

Como $|-2 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 1 \text{ } -2 \text{ } 4| = 4 - 2 + 4 - 1 - 4 + 8 = 9 \neq 0$, $rg(A^*) = 3$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A) = 2, rg(A^*) = 3 \Rightarrow rg(A) \neq rg(A^*)$. Es un SI (no tiene solución)

b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a = 1$ y $a = -2$.

Resolución

- Para $a = 1$, hemos visto en el a) que el sistema tiene infinitas soluciones. El sistema en este caso queda reducido a una ecuación con 3 incógnitas: $x + y + z = 1$. Tomando, $y = \lambda, z = \mu$, se tiene $x = 1 - \lambda - \mu$

Luego, las infinitas soluciones son $\{x = 1 - \lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu\}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Las infinitas soluciones se corresponden con los puntos de un plano en el espacio.

- Para $a = -2$, hemos visto en el a) que el sistema no tiene solución.

4.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41} .

Resolución

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Como $37 = 3 \cdot 12 + 1$, $A^{37} = A^{3 \cdot 12 + 1} = (A^3)^{12} \cdot A^1 = I^{12} \cdot A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Como $41 = 3 \cdot 13 + 2$, $A^{41} = A^{3 \cdot 13 + 2} = (A^3)^{13} \cdot A^2 = I^{13} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A .

Resolución

Hallemos primero $\det A = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Usando propiedades de los determinantes y teniendo en cuenta que A es una matriz cuadrada de

orden 2, se tiene: $|3A^{52}(A^t)^4| = 3^2 |A|^{52} |A|^4 = 9 |A|^{56} = 9 \cdot 1^{56} = 9$

5.- Considera $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa.

Resolución

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + \end{pmatrix}$

AB no tiene inversa $\Leftrightarrow \det(AB) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 2(m + 1) = 0 \Leftrightarrow -2m = 0 \Rightarrow m = 0$

b) Determina los valores de m para los que BA no tiene inversa.

Resolución

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + m \cdot 1 - 1 \cdot 1 + m \cdot 0 - 1 \cdot \end{pmatrix}$

BA no tiene inversa $\Leftrightarrow \det(BA) = 0$.

$\det(BA) = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (m - 1) + 1 \cdot 1 \cdot (m - 2) - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot (m - 2) - 2 \cdot 1 \cdot (m - 1) =$

$= -4 + 3m - 3 + m - 2 + 3 - 2m + 4 - 2m + 2 = 0$

Luego, BA no tiene inversa para ningún valor de m porque su determinante vale 0

c) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX = C$ y halla una solución en la que $x + y + z = 0$.

Resolución

$m = 0$, $BAX = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = \end{cases}$

Si restamos 2ª ec. - 1ª ec. nos queda $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - y - z = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 - z$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $2(1 - z) + y + z = 2 \Rightarrow 2 - 2z + y = 2 \Rightarrow y = z$

Llamando $z = \lambda$, las infinitas soluciones del sistema son $\{x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = \lambda\}$, que se corresponden con los puntos de una recta.

Si una solución cumple $x + y + z = 0 \Rightarrow 1 - \lambda + \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Por tanto, la solución es $\{x = 1 - (-1), y = -1, z = -1\} \Rightarrow \{x = 2, y = -1, z = -1\}$

6.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que una matriz X verifica que $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante.

Resolución

$|X^3AX| = |B^2|$. Usando propiedades de los determinantes, $|X|^3|A||X| = |B|^2$

Como $|A| = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ y $|B| = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow |X|^4 \cdot 1 = (-2)^2 = 4 \Rightarrow |X| = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt[4]{2^2} = \pm \sqrt{2}$

b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$.

Resolución

Para despejar Y hay que multiplicar los dos miembros de la ecuación por la izquierda por $(A^2)^{-1}$ y por la derecha por B . Para ello, es necesario que exista $(A^2)^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, |A^2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{11} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} (5 \cdot 3 - 3 \cdot 32) = \frac{1}{11} (15 - 96) = \frac{1}{11} (-81) = -\frac{81}{11}$$

$$(A^2)^{-1}(A^2YB^{-1})B = (A^2)^{-1}AB \Rightarrow I \cdot Y \cdot I = Y = (A^2)^{-1}AB$$

$$\text{Luego, } Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.- (prueba extraordinaria) Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & m & 4 & -2 & 0 & m & +2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = (x, y, z)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2m & 1 \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema según los valores de m .

Resolución

matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & m & 4 & -2 & 0 & m & +2 & -3 \end{pmatrix}$; matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & m & 4 & -2 & 2m & 0 & m & +2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \det(A) = -12 + m^2 + 2m + 2m + 4 - 6m = m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow m = 4, m = -2$$

Si $m \neq 4, m \neq -2$

$\Rightarrow \{rg(A) = 3 \text{ porque } \det \det A \neq 0, rg(A^*) = 3 \text{ porque } A^* \text{ contiene a } A \text{ y no puede ser } 4 \text{ pues sólo tiene } 3 \text{ filas}\}$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A^*) = rg(A) = n^\circ$ de incógnitas: SCD (solución única)

Si $m = 4$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $rg(A) = 2$, porque $\det \det A = 0$ y el menor $|1 \ -2 \ 4 \ 4| = 12 \neq 0$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 4 & 4 & -2 & 8 & 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Como $2^{\text{a}}c = -2 \cdot 3^{\text{a}}c$, $rg(A^*) = rg(1 \ 1 \ 2 \ 4 \ -2 \ 8 \ 0 \ -3 \ 1) = 3$, pues su determ. es $\neq 0$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3 \Rightarrow$ Es un SI (no tiene solución)

Si $m = -2$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $rg(A) = 2$, porque $\det \det A = 0$ y el menor $|4 \ -2 \ 0 \ -3| = -12 \neq 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 4 & -2 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}; 2^{\text{a}}f = -2 \cdot 1^{\text{a}}f, rg(A^*) = rg(1 \ -2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ -3 \ 1) = 2 \text{ pues } |1 \ 2 \ -3 \ 1| = 7 \neq 0$$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, $rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^\circ$ incógnitas, SCI (tiene infinitas soluciones)

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Resolución

Si $m = -2$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $f_2 = -2f_1$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. El sistema queda así

$\{x - 2y + z = 2 \quad -3z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$. Luego, todas las infinitas soluciones tienen $z = -\frac{1}{3}$. Imposible que haya

alguna solución con $z = 0$

8.- (prueba extraordinaria) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = (x \ y \ z)$

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Resolución

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$(1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 2) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

$$\text{Luego, } \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \quad \lambda = -1$$

b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$?

En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Resolución

El sistema sería, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que es un SCI, porque es homogéneo y el determinante de la matriz de coeficientes es 0. Lo resolvemos:

$$\{2y + 3z = 0 \quad -y + 2z = 0 \quad y = 0 \Rightarrow x = k, y = 0, z = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

No existe ninguna solución tal que $z = 1$ porque en todas las soluciones $z = 0$

9.- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -my + z = 1 \\ 5x + 2y + mz = 0 \\ my + (m - 3)z = -3 \end{cases}$

a) Discute el sistema en función de m .

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 0 & -m & 1 & 5 & 2 & m & 0 & m & m & -3 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -m & 1 & 1 & 5 & 2 & m & 0 & 0 & m & m & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 5m + 5m(m - 3) = 5m(1 + m - 3) = 5m(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \quad \text{ó} \quad m = 2$$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 2$, $\det A \neq 0$, luego $\text{rg } A = 3$ y $\text{rg } A^*$ también es 3 porque A^* contiene a la matriz A y A^* sólo tiene 3 filas.

Como $\text{rg } A = \text{rg } A^* = \text{n}^\circ$ de incógnitas por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

- Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\text{rg } A = 2$ porque $\det A = 0$ y el menor $|0 \ 1 \ 2 \ 0| = -2 \neq 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Como } 3^\circ \text{f} = -3 \cdot 1^\circ \text{f}, \text{ rg } A^* = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ porque } |0 \ 1 \ 2 \ 0| = -2 \neq 0$$

Como $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

- Si $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\text{rg } A = 2$ porque $\det A = 0$ y el menor $|5 \ 2 \ 0 \ 2| = 10 \neq 0$

$A^* = (0 \ - \ 2 \ 1 \ 1 \ 5 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2 \ - \ 1 \ - \ 3)$, $\text{rg } A^* = 3$ porque el menor $|0 \ 1 \ 1 \ 5 \ 2 \ 0 \ 0 \ - \ 1 \ - \ 3| = 10 \neq 0$

Como $\text{rg } A = 2 \neq \text{rg } A^* = 3$, por Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Para $m = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y = 5$.

Resolución

La matriz del sistema queda reducida, en este caso a la matriz $(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 5 \ 2 \ 0 \ 0)$.

El sistema es, $\{z = 1 \ 5x + 2y = 0\}$. Despejando, $x = \frac{-2y}{5}$.

Llamando $y = \lambda$ las infinitas soluciones del sistema son $\{x = \frac{-2\lambda}{5} \ y = \lambda \ z = 1\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $y = 5$, entonces $\lambda = 5$. Sustituyendo, $\{x = \frac{-2 \cdot 5}{5} \ y = 5 \ z = 1\} \Rightarrow \{x = -2 \ y = 5 \ z = 1\}$, que es la solución que se pide.

10.- Considera $A = (1 \ - \ 1 \ m \ m \ 2 \ - \ 3 \ m \ - \ 1 \ 0 \ 4)$, $B = (5 \ - \ 1 \ 2)$ y $C = (3 \ 1 \ 0)$

a) Determina los valores de m para los que la ecuación $AX + B = C$ tiene solución única.

Resolución

$AX + B = C$ restando B en los dos miembros $\rightarrow AX = C - B$.

Para que la ecuación tenga solución única debe existir A^{-1} . Porque si existe, multiplicando por A^{-1} por la izquierda en los dos miembros quedaría despejada X :

$$AX = C - B \quad . \quad A^{-1} \text{ por la izda} \rightarrow A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(C - B)$$

Para que exista A^{-1} debe ser $\det A \neq 0$. Pero $\det A = 8 + 3(m - 1) - 2m(m - 1) + 4m =$

$$= 8 + 3m - 3 - 2m^2 + 2m + 4m = -2m^2 + 9m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-9 \pm 11}{-4} \Rightarrow m = \frac{-1}{2} \quad m = 5.$$

Luego debe ser $m \neq \frac{-1}{2}$, $m \neq 5$

b) Para $m = 0$, halla X tal que $AX + B = C$.

Resolución

Para $m = 0$, $A = (1 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ - \ 3 \ - \ 1 \ 0 \ 4)$, $\det A = 8 - 3 = 5 \neq 0$ (existe A^{-1})

$$AX = C - B \quad . \quad A^{-1} \text{ por la izda} \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \rightarrow IX = A^{-1}(C - B) \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

$$m. c(A) = (|2 \ - \ 3 \ 0 \ 4| \ |0 \ - \ 3 \ - \ 1 \ 4| \ |0 \ 2 \ - \ 1 \ 0| \ |- \ 1 \ 0 \ 0 \ 4| \ |1 \ 0 \ - \ 1 \ 4| \ |1 \ - \ 1 \ - \ 1 \ 0| \ |- \ 1 \ 0 \ 2 \ - \ 3|)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)^t. \text{ Luego, } A^{-1} = \frac{1}{5}(8 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2)$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \frac{1}{5}(8 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2)[(3 \ 1 \ 0) - (5 \ - \ 1 \ 2)] = \frac{1}{5}(8 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2)(-2 \ 2 \ - \ 2) = \frac{1}{5}(-2 \ 2 \ - \ 2)$$

$$X = \left(\frac{-14}{5} \quad \frac{-4}{5} \quad \frac{-6}{5} \right)$$

11.- (prueba ordinaria) Considera la matriz $A = (1 \ - \ 1 \ m \ + \ 2 \ 0 \ 1 \ m \ + \ 1 \ m \ 0 \ 5)$

a) Estudia el rango de A según los valores de m .

Resolución

$$\det A = 5 - m(m+1) - m(m+2) = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = -2m^2 - 3m + 5 = 0$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm 7}{-4} \Rightarrow m = \frac{-5}{2} \quad m = 1$$

– Si $m \neq \frac{-5}{2}, m \neq 1$, $\det A \neq 0$, luego $\operatorname{rg} A = 3$

– Si $m = \frac{-5}{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-5}{2} & 2 & 0 & 1 & \frac{-5}{2} & 1 & \frac{-5}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\operatorname{rg} A = 2$, pues $\det A = 0$ y $|1 \ -1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$

– Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$ porque $\det A = 0$ y el menor $|1 \ -1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$

b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$.

Resolución

Para $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\det A = 5 - 6 - 8 = -9 \neq 0$. Luego, existe A^{-1} .

Como $2020A \cdot \frac{1}{2020} \cdot A^{-1} = 2020 \cdot \frac{1}{2020} \cdot AA^{-1} = 1 \cdot I = I$, resulta que $(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot A^{-1}$.

Hallemos A^{-1} :

$$m.c(A) = (|1 \ 3 \ 0 \ 5| \ |0 \ 3 \ 2 \ 5| \ |0 \ 1 \ 2 \ 0| \ |-1 \ 4 \ 0 \ 5| \ |1 \ 4 \ 2 \ 5| \ |1 \ -1 \ 2 \ 0| \ |-1 \ 4 \ 1 \ 3| \ |1 \ 4 \ 0 \ 3| \ |1 \ -1 \ 0 \ 1|) =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)^t. \text{ Luego, } A^{-1} = \frac{1}{-9} (5 \ 5 \ -7 \ 6 \ -3 \ -3 \ -2 \ -2 \ 1) = \frac{-1}{9} (5 \ 5 \ -7 \ 6 \ -3 \ -3 \ -2 \ -2 \ 1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (2020A)^{-1} &= \frac{1}{2020} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{-1}{9} (5 \ 5 \ -7 \ 6 \ -3 \ -3 \ -2 \ -2 \ 1) = \frac{-1}{18180} (5 \ 5 \ -7 \ 6 \ -3 \ -3 \ -2 \ -2 \ 1) \\ &= \left(\frac{-1}{3636} \quad \frac{-1}{3636} \quad \frac{7}{18180} \quad \frac{-1}{3030} \quad \frac{1}{6060} \quad \frac{1}{6060} \quad \frac{1}{9090} \quad \frac{1}{9090} \quad \frac{-1}{18180} \right) \end{aligned}$$

12.- (prueba ordinaria) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a .

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 1 & 2a & 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$

$\det A = 4 + 1 - 4 - 1 = 0$. Luego, $\operatorname{rg} A = 2$ porque $\det A = 0$, y el menor $|1 \ 1 \ 1 \ 0| = -1 \neq 0$

Para $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 1 & 2a & 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$, el menor $|1 \ 1 \ a \ 0 \ 1 \ 2a \ 1 \ 4 \ 3a| = 3a + 2a - a - 8a = -4a$. Luego, $-4a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

- Si $a \neq 0$, $\operatorname{rg} A^* = 3$ porque tiene un menor de orden 3 de determinante no nulo.

Como $\operatorname{rg} A^* = 3 \neq \operatorname{rg} A = 2$ por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a = 0$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A = 2$

Como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 < n^\circ$ de incógnitas por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$.

Resolución

Para $a = 0$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - 4f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eliminando } f_3 \text{ por ser proporcional}$$

Nos queda el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = -z$.

Si llamamos $z = \lambda$, las infinitas soluciones son: $x = -\lambda, y = 0, z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para la 2ª parte del ejercicio, si $y + z = 4 \Rightarrow 0 + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 4$.

Luego, la solución sería $x = -4, y = 0, z = 4$