

## Тема 2.5. Кручення

### План

1. Крутний момент. Побудова епюр крутних моментів
2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса
3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця

[https://docs.google.com/presentation/d/1m5ht3SduN0Ka3qCGQ7woi2lsBQUu-seH/edit?usp=share\\_link&oid=103912148940254308897&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/presentation/d/1m5ht3SduN0Ka3qCGQ7woi2lsBQUu-seH/edit?usp=share_link&oid=103912148940254308897&rtpof=true&sd=true)

1. Крутний момент. Побудова епюр крутних моментів

Крученням називають такий вид деформації, за якого в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Моменти цих пар називають обертальними (якщо брус обертається) і скручувальними (якщо брус не обертається). Згідно зі стандартом, **обертальний момент позначають  $T$ .**

Оскільки на кручення працюють вали, що звичайно мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра рис. 1.

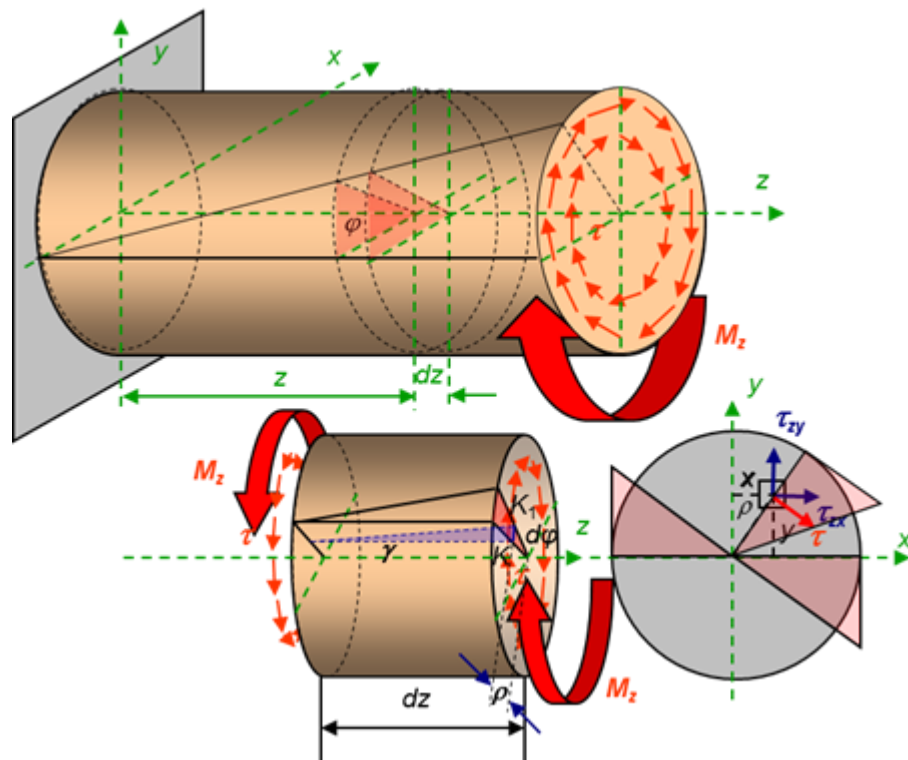


Рис. 1

Під час випробування гумового прямого кругового циліндричного бруса видно, що:

- 1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;
- 2) діаметри кіл, під час деформації залишаються такими самими і відстань між колами не зміниться;
- 3) усі твірні циліндра повертаються на той самий кут;
- 4) кожний поперечний переріз повертається відносно один одного на деякий кут, який називають **кутом закручування**.

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються прямими під час деформації.

Кут  $\varphi$  повороту кінцевого перерізу називають **повним кутом закручування**.

**Відносним кутом закручування** називають відношення кута закручування до відстані цього перерізу від закріплення

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{l}$$

Під час кручення виникає деформація зсуву, але не за рахунок поступального, а як результат обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого.

Отже, під час кручення у поперечних перерізах виникають **тільки дотичні внутрішні сили**, які утворюють крутний момент.

**Крутний момент** є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

Для наочного зображення розподілу крутних моментів уздовж осі бруса будують **епюри крутних моментів**. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів.

**Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.**

**Епюри крутних моментів** дають змогу визначити небезпечні перерізи.

## **2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса**

Знаючи, що під час кручення відбувається **деформація зсуву**, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки **дотичні напруги**.

На рис. 1 видно, що **абсолютний зсув** характеризується **кутом зсуву  $\gamma$** . Через незначні деформації

$$\gamma = \tan \gamma, \quad aa_1 = l \cdot \gamma_{\max}, \quad bb_1 = l \cdot \gamma$$

Оскільки радіуси поперечних перерізів під час деформації залишаються прямими, виразимо довжини дуг  $aa_1 = \varphi \cdot r$ ,  $bb_1 = \varphi \cdot \rho$ .

де:  $\varphi$  – повний кут закручування, рад;

$r$  – радіус циліндра;

$\rho$  – відстань волокна  $b$  від осі кручення.

Розділимо 
$$\frac{bb_1}{aa_1} = \frac{l \cdot \gamma}{l \cdot \gamma_{\max}} = \frac{\varphi \cdot \rho}{\varphi \cdot r};$$

звідси 
$$\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r}$$
 кут зсуву прямо пропорційний відстані  $\rho$  до осі обертання.

Застосовуємо формулу **закону Гука** для зсуву

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{\max}$$

якщо  $\rho = r$ ;  $\tau_{\max} = G \cdot \gamma_{\max}$ ; тоді

$$\tau = G \cdot \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r} = \tau_{\max} \cdot \frac{\rho}{r};$$

дотичні напруги в поперечному перерізі змінюються за довжиною радіуса за **лінійним законом**.

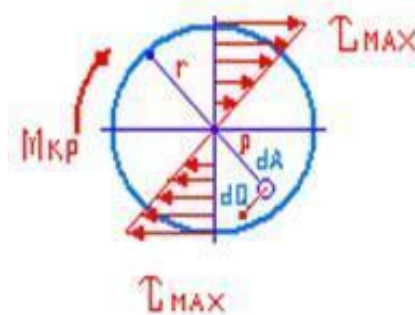


Рис. 2

Отже, дотичні напруги у кожній точці поперечного перерізу вала прямо пропорційні відстані  $\rho$  цієї точки від центра перерізу.

Графічно **закон зміни дотичних напруг** зображують прямою лінією. Епюру дотичних напруг показано на рис. 2. Як бачимо, найбільше значення дотичні напруги мають біля поверхні вала, в центрі вони дорівнюватимуть нулю.

Величину дотичної напруги після того, як знайдено закон розподілу, можна визначити з рівняння, яке виражає умову рівноваги відсіченої частини вала.

Сумарний момент усіх внутрішніх дотичних сил відносно осі вала дорівнює:

$$M_B = M_K = \int_A \tau \cdot dA \cdot \rho = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A dA \cdot \rho^2 ;$$

де:  $dA$  – площа елементарної площадки на відстані  $\rho$  від осі кручення;

$$I_P = \int_A dA \cdot \rho^2$$

– полярний момент інерції перерізу.

$$M_K = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot I_P = \frac{\tau \cdot r}{r \cdot \rho} \cdot I_P ;$$

$$\tau = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho$$

– формула для визначення дотичних напруг під час кручення бруса круглого поперечного перерізу.

Коли  $\rho = r$ , то напруги матимуть максимальні значення.

$$W_P = \frac{I_P}{r}$$

– полярний момент опору крученню (відношення полярного моменту інерції до радіуса перерізу).

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P}$$

– формула для визначення найбільших дотичних напруг.

### 3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця

$$\varphi_o = \frac{M_K}{G \cdot I_P}$$

– формула для визначення відносного кута закручування, рад.

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P}$$

– формула для визначення повного кута закручування, рад/м.

$G \cdot I_P$  – жорсткість перерізу під час кручення.

У формулах кут закручування виражено в радіанах. Переведення у градуси виконується за такою формулою:

$$\varphi_o = \varphi \cdot \frac{180}{\pi}$$

*Повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу під час кручення.*

Оскільки для виведення формули застосовано закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

*Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок.*

Полярні моменти інерції і моменти опору перерізу вала.

Для суцільного круглого вала:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} ; \quad W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16} .$$

Для порожнистого вала:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4) ; \quad W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4) ; \text{ де } \alpha = \frac{d}{d_0} .$$