

**Câu 1. (3 điểm)** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn các điều kiện  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  và

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{2}.$$

Tính giá trị của biểu thức  $P = a^4 + b^4$ .

**Câu 2. (4 điểm)** Cho phương trình  $x^3 + mx^2 - x + m - m^2 = 0$  (\*) với tham số  $m$ .

- a) Chứng minh rằng phương trình (\*) luôn có một nghiệm  $x = 1 - m$  với mọi giá trị của tham số  $m$ .
- b) Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để phương trình (\*) có ba nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ .

**Câu 3. (4 điểm)** Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD; AM là đường kính của đường tròn (O); K là hình chiếu của B lên AM. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BD và CM.

- a) Chứng minh rằng DK vuông góc AC.
- b) Chứng minh rằng AEFC là tứ giác nội tiếp.
- c) Gọi H là trực tâm của tam giác AEC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFC. Chứng minh rằng  $HE = 2IO$ .

**Câu 4. (3 điểm)** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức dưới đây:

a) 
$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2.$$

b) 
$$\frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}.$$

**Câu 5. (3 điểm)** Cho tam giác ABC có  $\angle A = 2\angle B$ . Chứng minh rằng  $BC^2 = AB.AC + AC^2$ .

**Câu 6. (3 điểm)** Tìm tất cả các số tự nhiên  $x, y$  và số nguyên tố  $p$  sao cho  $p^x = y^4 + 64$

**HẾT**

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

**HƯỚNG DẪN GIẢI SƠ LƯỢC**

**Câu 1.**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a + b = ab \quad (1) \quad ; \quad \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} = \frac{a+b+2}{2(a+b)} \quad (2)$$

Kết hợp (1) & (2)  $\Rightarrow a + b = ab = -2$

$$P = a^4 + b^4$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2(ab)^2 = [(-2)^2 - 2 \cdot (-2)]^2 - 2(-2)^2 = 56$$

**Câu 2.**

a) Đặt:  $f(x; m) = x^3 + mx^2 - x + m - m^2$  với tham số  $m$ .

Xét  $f(1-m)$ ,

$$\begin{aligned} f(1-m) &= (1-m)^3 + m(1-m)^2 - (1-m) + m - m^2 \\ &= 1 - 3m + 3m^2 - m^3 + m - 2m^2 + m^3 - 1 + m + m - m^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 1 - m$  là nghiệm của  $f(x; m)$  hay  $x = 1 - m$  là nghiệm của (\*).

b) Nhận xét:  $f(x; m) \equiv (x + m - 1)$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow x^3 + mx^2 - x^2 + x^2 + xm - x - m^2 - xm + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + m - 1) + x(x + m - 1) - m(x + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + m - 1)(x^2 + x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + m - 1 = 0 \\ x^2 + x - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Vậy phương trình (\*) có ba nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác  $1 - m$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} = 1 + 4m > 0 \\ (1-m)^2 + (1-m) - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-1}{4} \\ m \neq 2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Gọi  $x_1 = 1 - m$  và  $x_2 ; x_3$  là hai nghiệm của (1).

Theo Vi-ét: 
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 \cdot x_3 = -m \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 + (-1)2 - 2.(-m) = 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ (nhân)}$$

### Câu 3.

a) Chứng minh  $DK \perp AC$ :

$$\begin{aligned} \square BCM &= \square BAD \Rightarrow DK \parallel MC \\ &\Rightarrow DK \perp AC \end{aligned}$$

b) Chứng minh AEFC nội tiếp:

DABD © DAMC

E trung điểm BD

F trung điểm MC

⇒ DABE  DAMF

(T/c tam giác phân đôi)

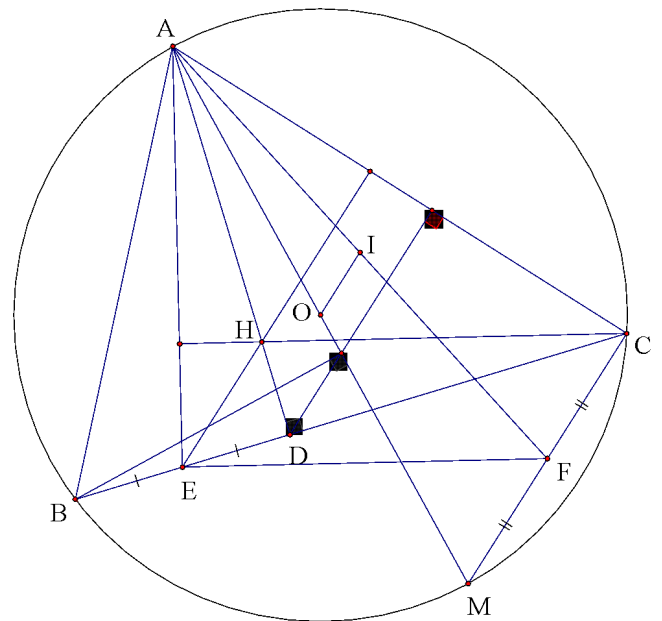
$$\Rightarrow \boxed{\text{BAE}} = \boxed{\text{MAF}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{BAM}} = \boxed{\text{EAF}} \Rightarrow \boxed{\text{MCE}} = \boxed{\text{EAF}}$$

$\Rightarrow$  Tứ giác AEFC nội tiếp.

c) Chứng minh  $HE = 2IO$ :

- Chứng minh EHCF là hình bình hành  $\Rightarrow HE = CF = MF$ .
- $OI = \frac{1}{2} MF \Rightarrow đpcm !$



**Câu 4.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh:

a)  $\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2$ .

$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 \leq 2(a^2+1) \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

: đúng với mọi  $a$ .

$$b) \quad \frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}.$$

$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} \leq \frac{2}{(a+1)^2}; \text{Cmtt: } \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{(b+1)^2}, \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{2}{(c+1)^2}$$

Khi đó:

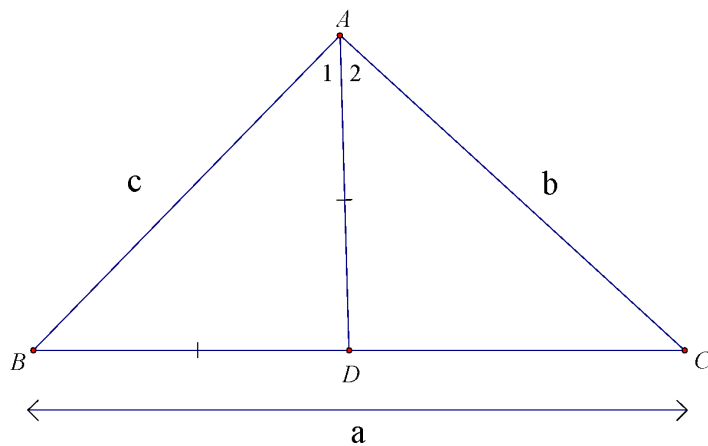
$$\frac{4}{a^2+b^2+2} = \frac{4}{a^2+1+b^2+1} \leq \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq 2 \left[ \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a^2+b^2+2} \leq \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2}.$$

$$\text{Cmtt: } \frac{2}{b^2+c^2+2} \leq \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}; \frac{2}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}.$$

Từ đây, suy ra điều cần chứng minh.

**Câu 5.** Chứng minh:  $BC^2 = AB.AC + AC^2 \Leftrightarrow a^2 = bc + b^2$



$$\bullet \quad \triangle CAD \cong \triangle DCBA \Rightarrow BC = \frac{AC^2}{CD} = AC \cdot \frac{AC}{CD} = AC \cdot \frac{AB}{BD} \quad (1)$$

$$\bullet \quad BD = \frac{ac}{b+c} \quad (\text{Bài toán quen thuộc lớp 8})$$

$$\frac{c}{ac} \Rightarrow a = \frac{b(b+c)}{a} \Rightarrow a^2 = bc + b^2$$

• (1)  $\Rightarrow$

**Câu 6.** Tìm tất cả các số tự nhiên  $x, y$  và số nguyên tố  $p$  sao cho  $p^x = y^4 + 64$  (1).

• Trường hợp 1:  $y \equiv 2 \Rightarrow y = 2k \ (k \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow p^x \equiv 2 \Rightarrow p \equiv 2 \Rightarrow p = 2.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2^x = (2k)^4 + 64 \Leftrightarrow 2^x = 16(k^4 + 4)$$

Nếu  $k > 0$ , khi đó:

$$k^4 + 4 = 2^m \ (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow k^4 = 2^m - 2^2$$

$$\Rightarrow k \equiv 2 \Rightarrow y = 4m_1 \ (m_1 \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow 2^x = (4m_1)^4 + 64 = 64(2m_1^4 + 1) = 2^6 \cdot (2m_1^4 + 1)$$

$$\Rightarrow (2m_1^4 + 1) \equiv 2 \text{ (vô lí)} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = 0; x = 6.$$

• Trường hợp 2:  $y \not\equiv 2 \Rightarrow p \not\equiv 2$

$$p^x = (y^2 + 8)^2 - (4y)^2 = (y^2 + 4y + 8)(y^2 - 4y + 8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 + 4y + 8 = p^m \\ y^2 - 4y + 8 = p^n \end{cases} \ (m, n \in \mathbb{N}^*; m > n; m + n = x)$$

$$\Rightarrow p^m - p^n = 8y \Rightarrow p^n(p^{m-n} - 1) = 8y, \text{ trong } (8; ) = 1$$

$$\Rightarrow p^m = 8 \text{ (vô lí!)} \Rightarrow y \text{ không thể là số lẻ!}$$

Đáp số  $(p; x; y) = (2; 6; 0)$