

Отдел образования, спорта и туризма Щучинского райисполкома  
Государственное учреждение образования «Гимназия г. Щучина»

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСКРАСКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Авторы работы:

Волошик Анастасия Андреевна, X класс

Резчиков Михаил Андреевич, XI класс

Сергей Илья Александрович, XI класс

ГУО «Гимназия г. Щучина»

Руководители работы:

Кахнович Галина Эдвардовна,

учитель математики высшей категории

Амичба Марина Генриковна,

учитель математики высшей категории

ГУО «Гимназия г. Щучина»

Щучин 2022

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Раскраски в науке и жизни.....	5
Глава 2. Исследовательская часть	
2.1. Исследование задачи №1.....	6
2.2. Исследование задачи №2.....	8
2.3. Исследование задачи №3.....	11
2.4. Исследование задачи №4.....	12
Заключение.....	13
Список использованных источников.....	14
Приложение.....	15

## ВВЕДЕНИЕ

Метод раскраски – один из способов решения нестандартных задач. Бывают задачи, где раскраска уже дана (например, для шахматной доски), бывают задачи, где раскраску с данными свойствами нужно придумать, а бывают задачи, где раскраска используется как идея решения. Суть метода раскраски: раскрасив некоторые ключевые элементы в несколько цветов, исследуют, что будет происходить, если выполнить условие задачи. Цвет позволяет значительно упростить понимание процесса, происходящего в условии, и, зачастую, приводит к решению.

Используя метод раскраски, можно получить красивое и лаконичное решение таких задач, как задачи на разрезание.

За основу исследовательской работы взята задача из турнира юных математиков (2019 г.).

Постановка задачи

1. Можно ли замостить доску  $10 \times 10$  прямоугольниками  $1 \times 4$ ?
2. На какие одинаковые части из четырёх клеток  $1 \times 1$  можно разрезать квадрат  $10 \times 10$ ?
3. Какое наибольшее количество полосок  $1 \times 5$  можно вырезать из листа клетчатой бумаги размером  $12 \times 13$  (резать можно только по линиям клеток)?
4. Исследуйте те же вопросы для разрезания листа бумаги и полосок других размеров

Цель работы: проанализировать возможность применения раскрасок при решении математических задач и показать эффективность метода раскраски в задачах на разрезание.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по теме исследовательской работы.
2. Применить изученный метод раскраски к исследованию задач на разрезание.
3. Рассмотреть различные способы раскраски к решению одной задачи.
4. Создать электронное приложение “Тетрис”

Объект исследования: способы и методы решения нестандартных и олимпиадных задач.

Предмет исследования: метод раскрасок.

Методы исследования: моделирование, сравнение, обобщение, аналогии, изучение литературных и интернет-ресурсов, анализ и классификация информации.

Гипотеза исследования: применение метода раскраски для решения нестандартных математических задач за счёт наглядности и оригинальности позволит значительно упростить их решение.

## Глава 1 РАСКРАСКИ В НАУКЕ И ЖИЗНИ

Раскраски – это не только любимое развлечение детей и многих взрослых. Использование цвета помогает как математикам, так и специалистам в разных прикладных сферах. Широко известна задача о «четырех красках», суть которой заключается в том, чтобы доказать, что для раскраски любой карты так, чтобы никакие две граничащие области не оказались окрашены одинаково, достаточно всего четырех цветов. Считается, что впервые эту проблему сформулировал в 1852 году шотландский студент Френсис Гутри. И с тех пор многие математики тщетно пытались ее разрешить, пока не были представлены простые доказательства с помощью специализированного программного обеспечения. Раскраски помогают специалистам сотовой связи в организации зоны покрытий. Для устойчивого сигнала необходимо строго разделять диапазоны частот между соседними базовыми станциями. И тут задача сводится к замощению плоскости шестиугольниками, раскрашенными минимальным количеством цветов. Метод раскрасок совместно с теорией графов применяется и в автоматизированном составлении расписания. Это могут быть учебные занятия, работа и прием специалистов в учреждении и т.п. При этом строится граф, вершины которого, например, учебные занятия. В случае, если занятия невозможно провести одновременно (занят один и тот же класс, аудитория, преподаватель), вершины соединяют ребрами. Граф раскрашивают таким образом, чтобы каждая пара соседних вершин была окрашена в разные цвета, а общее количество использованных красок должно быть минимальным. С таким перебором легко справляются современные программы, и на выходе получается готовое расписание. Интересно применение графов и раскрасок в составлении таблиц для известной игры sudoku. Клетки таблицы принимают за вершины графа, ребрами соединяют те вершины, которые расположены в одной горизонтали, вертикали и угловом модуле. Затем вершины графа красят так, чтобы каждые две соседние были разного цвета. Для таблицы 4\*4 достаточно 4 красок, для 8\*8 – соответственно 8 цветом. Далее остается только расставить необходимое для решения задачи количество цифр [3].

## ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

### 2.1 Исследовательская задача №1

Можно ли замостить доску 10x10 прямоугольниками 1x4?

Решение 1. Для ответа на этот вопрос воспользуемся методом раскраски. Разобьём доску 10 x 10 на маленькие квадраты размером 2 x 2 и раскрасим их в чёрный и белый цвет следующим образом:

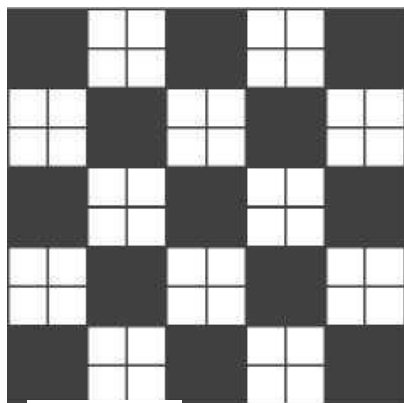


Рис.1

Прямоугольник 1 x 4 может накрыть 2 чёрных и 2 белых квадратика. Но чёрных квадратиков  $13 \times 4 = 52$ , а белых –  $12 \times 4 = 48$ . Поэтому доску 10 x 10 замостить прямоугольниками 1 x 4 не возможно.

Идея применения подобной «шахматной раскраски квадратами 2 x 2 возникает естественным образом из обычной шахматной раскраски, которая очень часто применяется для доминошек 1 x 2. А здесь мы имеем дело с фигурой в два раза крупнее, потому и раскраска стала в два раза крупнее, причем в обоих направлениях.

Решение 2. Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (рис.2). Заметим, что любой прямоугольник содержит по одной клетке каждого из четырех цветов, но при данной раскраске на доске по 25 клеток 1 -го и 3-го цветов, 26 клеток - 2-го и 24 клетки - 4-го, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10 x 10 на тетрамино 1 x 4 не удастся.



Рис.2

Решение 3. Раскрасим доску диагональной раскраской в два цвета (рис. 3). Заметим, что любой прямоугольник содержит одну черную клетку, а их на доске - 24. Таким образом, нам удастся вырезать не более 24 тетрамино, а по площади надо 25 штук. Легко заметить, что данная раскраска является разновидностью диагональной раскраски на рисунке 2, когда в качестве черного цвета

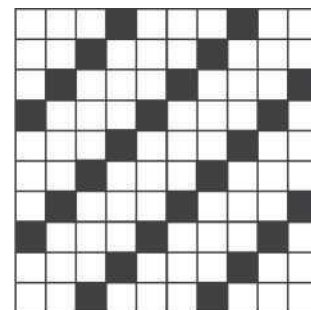
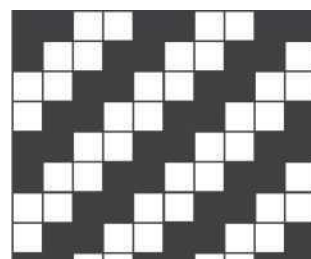


Рис.3

выделен цвет номер 4, которого меньше 25 клеток. С таким же успехом можно было бы использовать в качестве черного цвета и цвет номер 2, то тогда бы мы получили сразу 26 прямоугольников, что невозможно. Кроме того, можно было бы объединить в черный цвет и



любые два соседних цвета с раскраски на рисунке 2. Например, если бы мы в качестве черного цвета использовали цвета номер 1 и 2, то у нас бы возникла раскраска рисунка 4.

Решение 4. Посмотрим на раскраску рисунка 2 из статьи. Заметим, что любой прямоугольник  $1 \times 4$  содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 51 черная клетка и 49 белых, т.е. не поровну.

Значит, разрезать доску  $10 \times 10$  на тетрамино  $1 \times 4$  не удастся.

Решение 5. Разделим доску на квадраты  $2 \times 2$  и раскрасим их в 4 цвета одинаковым образом (рис.5). Тогда каждого цвета у нас будет по 25 клеток (нечетное количество), но при этом каждый прямоугольник содержит четное количество (0 или 2) клетки каждого цвета. И как следствие, во всех вырезанных тетрамино должно быть в сумме по четному количеству клеток каждого цвета, а не 25, что приводит нас к выводу о невозможности разрезания доски.

Рис.4



Рис.5

Решение 6. При решетчатой раскраске доски (рис. 6 ) каждый прямоугольник содержит четное (0 или 2) количество черных клеток, а их на доске- нечетное количество (25), значит, разрезать доску на прямоугольники не удастся. Заметим, что раскраска на рисунке 6 является разновидностью предыдущей раскраски на рисунке 5, когда только один из четырех цветов выделен в качестве черного, а рассуждение является принципиально таким же. Кроме того, очень важным свойством раскраски с рисунка 5 является то, что она фактически каждый из двух цветов обычной шахматной раскраски в свою очередь тоже раскрасила в шахматном порядке (в данном случае черный цвет — во 2-й и 3-й, а белый — в 1-й и 4-й). Это свойство используется при решении некоторых задач методом раскраски.

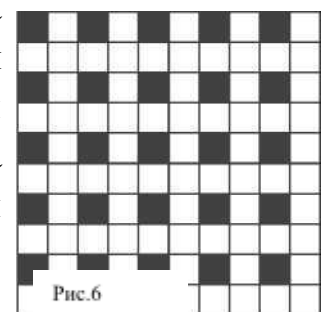


Рис.6

Решение 7. Применим вертикальную полосатую раскраску доски в два цвета (рис. 7). Тогда любая вертикальная фигурка содержит кратное 4 (0 или 4) количество черных клеток, а любая горизонтальная — 2 черные клетки. А так как общее количество черных клеток — 50, т.е. при делении на 4 дает остаток 2, то общее число горизонтальных прямоугольников нечетно. Рассуждая аналогично для горизонтальной полосатой раскраски, мы

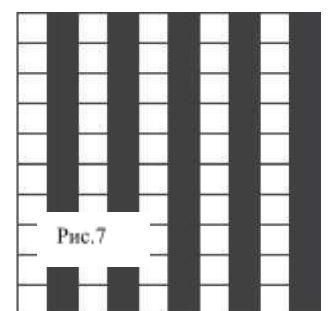


Рис.7

докажем, что общее число вертикальных прямоугольников также нечетно, но тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний — разрезать не удастся.

В этом решении в полной мере проявилась специфика полосатой раскраски — деление фигурок на два направления. Самое интересное заключается в том, что если мы будем считать при вертикальной полосатой раскраске белый и черный цвета соответственно за 0 и 1, а при горизонтальной полосатой раскраске — соответственно за 1 и 3, то при наложении этих раскрасок друг на друга и подсчете суммы чисел в каждой клетке у нас получится не что иное, как раскраска квадратами  $2 \times 2$  в четыре цвета с рисунка 5.

Рис.5

Решение 8. Заметим, что при вертикальной полосатой раскраске в 4 цвета (рис. 8) вертикальное тетрамино содержит кратное 4 (0 или 4) количество клеток каждого цвета, а горизонтальное тетрамино содержит по одной клетке каждого цвета. Но каждого цвета на доске либо 20 (кратно 4), либо 30 клеток (остаток 2 при делении на 4), а значит, на доске количество горизонтальных тетрамино будет одновременно делиться на 4 и давать остаток 2 при делении на 4. Противоречие. Опять тот же вывод-разрезать доску  $10 \times 10$  на прямоугольники  $1 \times 4$  нельзя.



Рис.8

Аналогично, что получится при проведении в жизнь двух уже известных — сначала 4 цвета превратим в 2, а затем наложим рисунок «вертикальную» раскраску рисунка 9 получим, что каждое вертикальное тетрамино содержит делящееся на 4 число черных клеток (либо 0, либо 4), а каждое горизонтальное тетрамино — одну черную клетку. Так как всего черных клеток 20, количество горизонтальных тетрамино делится на 4. Применив аналогичную «горизонтальную» раскраску, получим, что и количество вертикальных тетрамино делится на 4. Противоречие, так как всего тетрамино

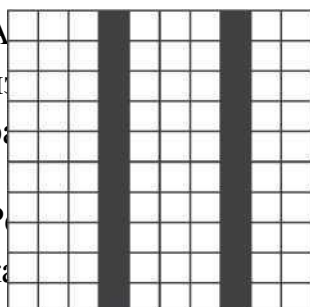


Рис.9

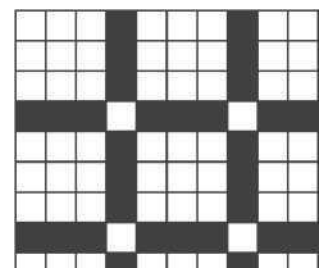


Рис.9

25 штук, и значит, доску нельзя разрезать

Решение 10

Заметим, что каждый прямоугольник  $1 \times 4$  содержит в себе нечетное (1 или 3) количество черных клеток, а всего их на доске при данной раскраске четное количество - 32. Значит, и прямоугольников должно быть четное количество, т.е. равное 25. Вывод прежний - разрезать нельзя

Решение 11. Если вертикальную раскраску с рисунка 9 и аналогичную горизонтальную раскраску наложить друг на друга и для красоты поменять цвета местами, то получится следующая решетчатая раскраска (рис.11). Тогда любой прямоугольник покрывает кратное 3 (0 или 3) количество черных клеток, а их на доске не кратное 3 количество (64). И как следствие, делаем вывод, что все черные клетки принадлежать прямоугольникам не могут, а значит, и разрезать доску  $10 \times 10$  на тетрамино  $1 \times 4$  нельзя.

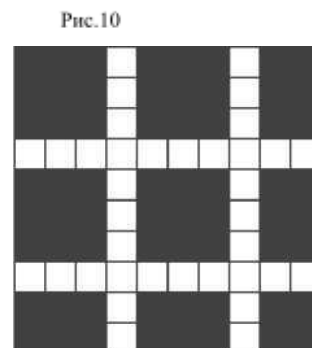


Рис.11

Решение 12. Применим еще одну раскраску в 4 цвета, которая отличается от раскраски в 4 цвета квадратами  $2 \times 2$  сдвигом каждой пары рядов относительно предыдущей пары на одну клетку (рис.12). Тогда каждый горизонтальный прямоугольник содержит по четному количеству клеток каждого цвета (0 или 2), а каждый вертикальный прямоугольник содержит по одной клетке каждого цвета.



Рис.12

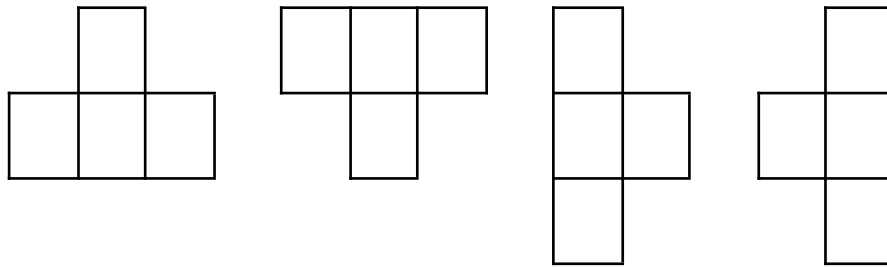
Так как каждого цвета будет по 25 клеток, то из выше изложенного следует, что количество вертикальных прямоугольников нечетно. Повернем раскраску на  $90^\circ$  и получим, что количество горизонтальных прямоугольников нечетно. Тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний — разрезать не удастся.

Приведенные решения наглядно проиллюстрировали красоту метода раскраски, а заодно и специфические свойства каждой из раскрасок в отдельности, особенно их взаимосвязи при наложении друг на друга [4, с 45].

## 2.2. Исследовательская задача №2

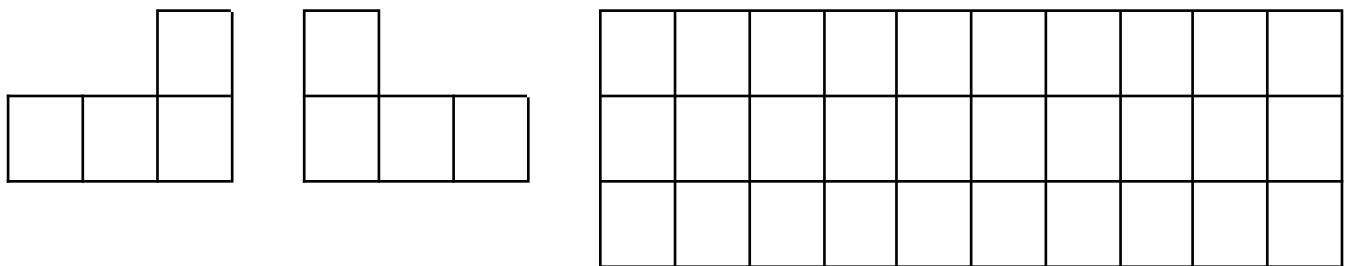
На какие одинаковые части из четырёх клеток  $1 \times 1$  можно разрезать квадрат  $10 \times 10$ ?

Исследуя данную задачу методом раскраски, доказано, что нельзя разрезать квадрат  $10 \times 10$  и на такие фигурки тетриса:

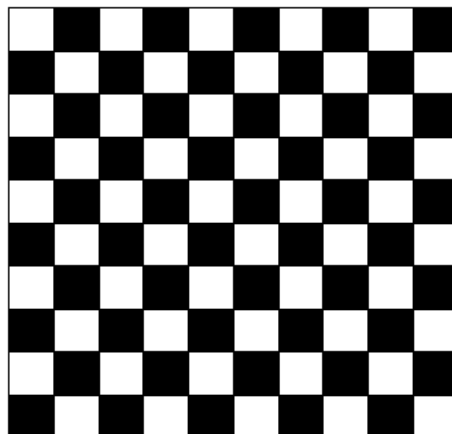


Действительно, используя шахматную раскраску доски, всего получилось по 50 чёрных и белых квадратов. Как бы эта фигурка не располагалась на доске, она обязательно покроет три квадрата одного цвета и один квадрат другого цвета. Пусть 50 чёрных квадратов мы покроем  $x$  раз по 3, и  $y$  раз по 1. Тогда  $3x+y=50$ . Но одновременно с чёрными будут покрываться и белые квадраты  $x$  раз по 1 и  $y$  раз по 3, т.е.  $x+3y=50$ . Решив систему из двух уравнений, имеем, что  $x=12,5$  и  $y=12,5$ . Чего не может быть.

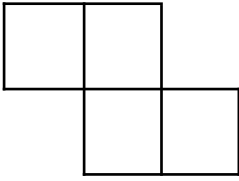
Невозможно разрезать квадрат и на такие фигурки тетриса:



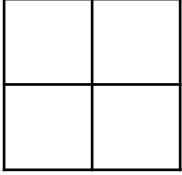
Доказательство аналогичное предыдущему случаю, но раскрасить квадрат необходимо чередующимися по цвету черными и белыми строками или столбцами. И тогда как бы эта фигурка не располагалась на доске, она обязательно покроет три квадрата одного цвета и один квадрат другого цвета.



Невозможно разрезать квадрат и на такие фигурки:



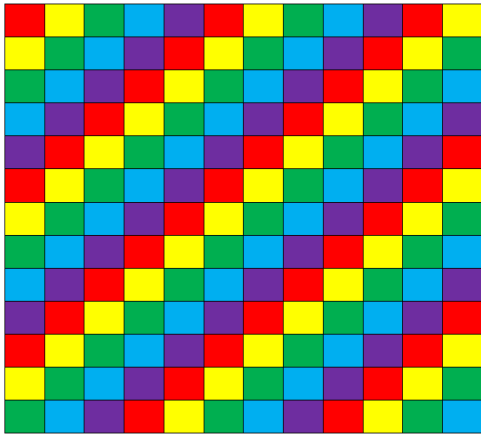
Разрезать квадрат  $10 \times 10$  можно лишь только на 25 фигур такого вида:



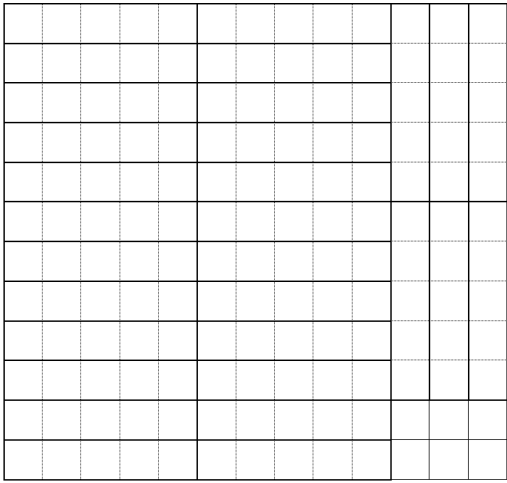
### 2.3 Исследовательская задача №3

Какое наибольшее количество полосок  $1 \times 5$  можно вырезать из листа клетчатой бумаги размером  $12 \times 13$  (резать можно только по линиям клеток.)

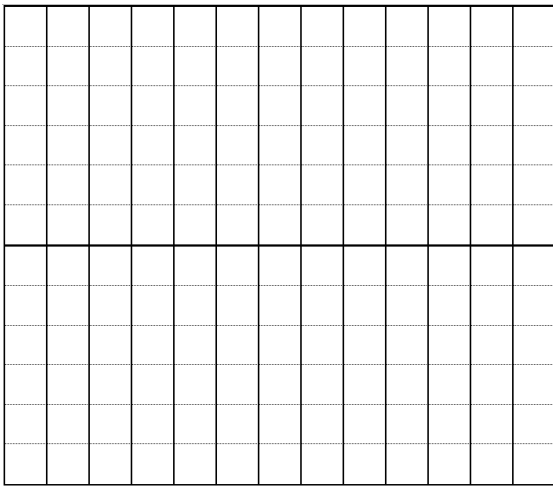
Методом раскраски убеждаемся, что из листа бумаги  $12 \times 13$  можно вырезать 30 полосок размером  $1 \times 5$ . Для доказательства применим диагональную раскраску в 5 цветов.



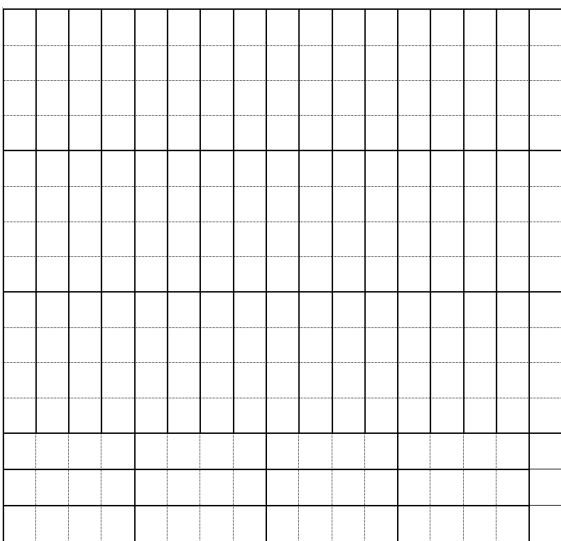
В результате раскраски мы убеждаемся, что наибольшее количество полосок будет 30, т.к. клеток жёлтого цвета 30, красного цвета 31, зелёного 32, синих 31, фиолетовых 30.



2.4 Из листа бумаги размером 12x13 можно вырезать 26 полосок размером 1x6.



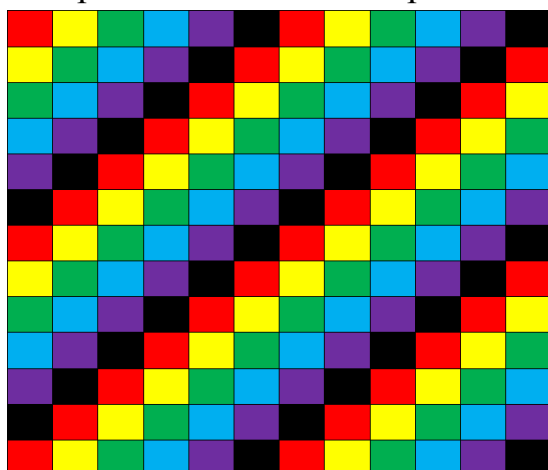
Из листа бумаги 17x15 можно вырезать 63 полоски размером 1x4.



2.4. Исследовательская задача №4  
Какое наибольшее количество полосок

1x6 можно вырезать из листа клетчатой бумаги 12x13.

С помощью раскраски, показанной на рисунке, убеждаемся, что из листа бумаги размером 12x13 можно вырезать 26 полосок размером 1x6.



Создание электронного приложения «Тетрис» позволило исследовать вопрос о нахождении наибольшего количества полосок 1 x k, которые можно вырезать из прямоугольника различных размеров m x n.

Пусть имеется прямоугольный лист бумаги размером m x n. Необходимо вырезать полоски размером 1 x k.

1. Если  $m=k$ , то количество полосок равно n.
2. Если  $n=k$ , то количество полосок равно m.
3. Если  $m>k$  и  $k>n$ , то количество полосок будет равно  $[m/k] \times n$  (где  $[\ ]$ -это целая часть от деления).
4. Если  $m>k$  и  $n>k$ , то количество полосок будет равно  $[m/k] \times n + [n/k] \times (m - [m/k] \times k)$ .
5. Если  $k>m$  и  $k<n$ , то количество полосок будет равно  $[n/k] \times m$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Когда мы открываем математические книги или журналы, то вольно или невольно наш взгляд останавливается на нестандартных занимательных задачах. Необычность ситуации, неочевидность ответа на поставленный вопрос заинтриговывает нас, и мы начинаем нелегкий поиск пути, ведущего к решению задачи. В процессе подготовки к Гродненскому турниру юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) возникла идея обобщить задачу «Тетрис», применяя метод раскраски. Данный метод раскрасок позволяет успешно справляться с решением многих задач такого типа, развивает логическое и пространственное мышление, расширяет математический кругозор.

В результате исследования получены следующие результаты:

- 1) Предложено 12 способов доказательства утверждения, что квадратную доску размером  $10 \times 10$  нельзя замостить или разрезать прямоугольниками  $1 \times 4$ .
- 2) Доказано, что данный квадрат нельзя разрезать и на другие фигурки тетриса.
- 3) Исследован вопрос о нахождении наибольшего количества полосок  $1 \times k$  которые можно вырезать из прямоугольника различных размеров  $m \times n$ .

Применение метода раскраски для решения нестандартных исследовательских математических задач за счёт наглядности и оригинальности позволило значительно упростить их решение. Приведенные решения задачи наглядно проиллюстрировали красоту метода раскраски, а заодно и специфические свойства каждой из раскрасок в отдельности, особенно их взаимосвязи при наложении друг на друга.

Создано электронное приложение «Тетрис» на языке JAVA SCRIPT с использованием библиотеки REACT.JS, которое можно использовать на факультативных занятиях по математике и информатике, оно будет полезно не только учащимся, но и учителям.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баранов В.Н., Баранова О.В. Экстремальные задачи в дискретной математике. Метод раскраски: учебное пособие. – Ижевск: изд-во «Удмуртский университет»,-2015
2. Белый С. Разноцветная математика – «Квант», № 6,1980
3. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание.- М.:МЦНМО, 2002
4. Кузнецов Д. О методе раскраски на примере одной задачи. – «Квантик», январь 2018.
5. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике.- М.: «Просвещение», 2002.
6. Подборка задач [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.problems.ru/> - Дата доступа 23.12.2021
7. Малый МЕХМАТ МГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mmmf.msu.ru/> - Дата доступа 24.01.2022



Cells **Filling**

Select an item:

Table  x

How it works

Cells **Filling**

Select an item:

Table  x

How it works

