Proposition de corrigé ENS Physique BCPST 2011

Olivier Orliac (olivier.orliac@ac-rouen.fr), relu par Olivier Alloschery - Lycée Pierre Corneille Rouen

1. $\vec{j}_Q(z,t) = -k\,\overrightarrow{grad}\,T(z,t)$

2. $P(z,t) = \iint_S \vec{j}_Q(z,t).d\vec{S} = j_Q(z,t).S = -k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_z S$

Bilan énergétique effectué entre les instants t et t + dt sur une tranche horizontale de terrain d'aire S comprise entre les profondeurs z et z + dz :

$$dH = \delta Q = j_Q(z)Sdt - j_Q(z+dz)Sdt \Leftrightarrow \rho SdzC_p dT = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}Sdzdt \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

d'où $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ avec $D = \frac{k}{\rho C_p}$ (diffusivité thermique)

3. $T(z,t) = \theta(z,t) + T_0$ donc $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ d'où $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$

4. $\underline{\theta}(z,t) = \underline{F}(z)e^{i\omega t}$; $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \Leftrightarrow i\omega \underline{F}(z)e^{i\omega t} = D\frac{d^2\underline{F}(z)}{dz^2}e^{i\omega t} \Leftrightarrow \frac{d^2\underline{F}(z)}{dz^2} = \frac{i\omega}{D}\underline{F}(z)$

L'équation caractéristique associée s'écrit : $r^2 = \frac{i\omega}{D} \Leftrightarrow r = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

On en déduit l'expression de la solution générale : $\underline{F}(z) = ae^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} + be^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$

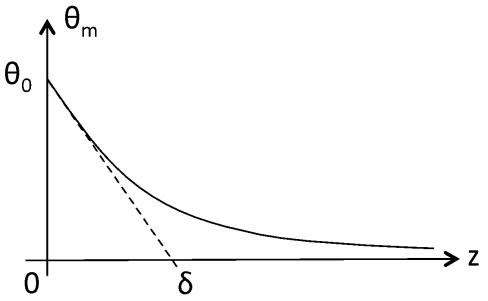
Le second terme est divergent en $z \to +\infty$, or l'amplitude des fluctuations doit tendre vers zéro lorsque la profondeur devient grande ce qui conduit à choisir b = 0.

En z = 0 l'amplitude des fluctuations est notée θ_0 ; en définitive $\underline{F}(z) = \theta_0 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$

5. $\underline{\theta}(z,t) = \underline{F}(z)e^{i\omega t} \Rightarrow \underline{\theta}(z,t) = \theta_0 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{i\omega t} \Leftrightarrow \underline{\theta}(z,t) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$ en posant $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

δ est homogène à une <u>longueur</u> ; $\theta(z,t) = \mathrm{Re}\left(\theta(z,t)\right) \Rightarrow \theta(z,t) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

6. $\theta_m(z) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$ et $\left.\frac{d\theta_m}{dz}\right|_{z=0} = -\frac{\theta_0}{\delta}$; on en déduit l'allure du graphe représentant $\theta_m(z)$:



7. $\theta_m(z)=\theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$ d'où $\frac{\theta_0}{2}=\theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \Leftrightarrow z=\delta\ln 2 \Leftrightarrow z=0,69\delta$ et $\frac{\theta_0}{100}=\theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \Leftrightarrow z=2\ln 10.\delta \Leftrightarrow z=4,6\delta$

8. $\delta=\sqrt{\frac{kT}{\pi\rho C_p}}=\left[\frac{1,4\times 6,9.10^2\times 24\times 3600}{3,14\times 2,8.10^3\times 1,0.10^3}\right]^{1/2}\approx\left[\frac{7\times 12\times 12}{10^2}\right]^{1/2}=2,6.12.0,1=3,1$ soit $\delta=3,1\,m$

9. $\lambda_m=\frac{2,9.10^{-3}\ m.K}{T_S}\Rightarrow\lambda_m=\frac{2,9.10^{-3}}{200}K$ d'où $\lambda_m=1,5.10^{-5}\ m=15\ \mu m$; <u>domaine IR</u>.

10. a. $P_r(t)-P_s(t)=j_Q(0,t)$

b. $P_s(t)=\sigma T_S^4(t)=\sigma\left[T_0+\theta_1\cos\left(2\pi\frac{t-t_0}{\tau}+\varphi\right)\right]^4$

$\Leftrightarrow$ $P_s(t)=\sigma T_0^4\left[1+\frac{\theta_1}{T_0}\cos\left(2\pi\frac{t-t_0}{\tau}+\varphi\right)\right]^4$

$\Leftrightarrow$ $P_s(t)\approx\sigma T_0^4\left[1+4\frac{\theta_1}{T_0}\cos\left(2\pi\frac{t-t_0}{\tau}+\varphi\right)\right]$

$\underline{T}=T_0+\theta_1 e^{-\frac{1+i}{\delta}z}e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}e^{i\varphi}$ d'où $\underline{j}_Q(z,t)=-k\frac{\partial\underline{T}}{\partial z}=\frac{k\theta_1}{\delta}(1+i)e^{-\frac{1+i}{\delta}z}e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}e^{i\varphi}$

L'équation de continuité s'écrit donc en utilisant les variables complexes : $\underline{P}_r(t)-\underline{P}_s(t)=\underline{j}_Q(0,t)$

$\Leftrightarrow(1-A)\left[P_0+p_1e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}\right]-\sigma T_0^4\left[1+4\frac{\theta_1}{T_0}e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}e^{i\varphi}\right]=\frac{k\theta_1}{\delta}(1+j)e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}e^{i\varphi}$

$\Leftrightarrow(1-A)P_0-\sigma T_0^4+\left[(1-A)p_1-\left(\frac{k\theta_1}{\delta}(1+i)+4\sigma\theta_1T_0^3\right)e^{i\varphi}\right]e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}=0$

$\Leftrightarrow$ $(1-A)P_0-\sigma T_0^4+\left[(1-A)p_1-\left(\frac{k\theta_1}{\delta}(1+i)+4\sigma\theta_1T_0^3\right)e^{i\varphi}\right]e^{i2\pi\frac{t-t_0}{\tau}}=0$

c. Cette équation est vérifiée quelque soit t si $(1-A)P_0-\sigma T_0^4=0\Leftrightarrow T_0=\left[\frac{(1-A)P_0}{\sigma}\right]^{1/4}$

11. Et si $(1-A)p_1 - \left(\frac{k\theta_1}{\delta}(1+j)+4\sigma\theta_1 T_0^3\right)e^{j\varphi}=0 \Leftrightarrow e^{i\varphi}=\frac{(1-A)p_1}{\frac{k\theta_1}{\delta}+4\sigma\theta_1 T_0^3+i\frac{k\theta_1}{\delta}}$

$\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\frac{k\theta_1}{\delta}}{\frac{k\theta_1}{\delta}+4\sigma\theta_1 T_0^3}$

car $\frac{k\theta_1}{\delta}+4\sigma\theta_1 T_0^3 > 0$ or $\delta=\sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}$ et $D=\frac{k}{\rho c_p}$ d'où $\frac{k}{\delta}=\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\sqrt{\rho c_p k}=\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}I$ d'où

$\tan\varphi = -\frac{I}{I+4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sigma T_0^3}$

12. a. On relève sur le graphique $T_{\min}=202\,K$ et $T_{\max}=238\,K$ soit $T_0=220\,K$

et $\theta_1=18\,K$; $\frac{\theta_1}{T_0}<10 \Rightarrow$ $\theta_1 << T_0$: l'approximation de la question 10.b. est valide.

b. Le décalage horaire correspondant au déphasage ϕ est de 1 heure martienne de retard ce qui correspond à $\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{\tau} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{12} \approx -0,26\,rad$.

$\tan\varphi = -\frac{I}{I+4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sigma T_0^3} \Leftrightarrow \left(I+4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sigma T_0^3\right)\tan\varphi = -I \Leftrightarrow I = -4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sigma T_0^3\frac{\tan\varphi}{1+\tan\varphi} \approx -4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\sigma T_0^3\frac{\varphi}{1+\varphi}$

$I = -4\sqrt{\frac{8,9.10^4}{3,1}}5,7.10^{-8}.(2,2.10^2)^3.\frac{\frac{-3,1}{12}}{1-\frac{3,1}{12}} \approx 4\sqrt{\frac{9}{3}}.5,7.(2,2)^3.\frac{3}{9} \approx 4.2.6.8.\frac{1}{3}=128$

soit $I \approx 1.10^2$

c. $I = Bd^{1/4} \Leftrightarrow d=\left(\frac{I}{B}\right)^4$; $d=\left(\frac{100}{1,6.10^3}\right)^4=\left(\frac{10}{1,6}\right)^4 10^{-8} \approx 1,5.10^3.10^{-8} \Rightarrow d \approx 2.10^{-5}\,m = 2.10^1\,\mu m$

Ordre de grandeur vraisemblable pour le diamètre d'un grain de sable…

13. $P_{th}=G_{th}(T-T_0)$

14. a. $P_R = R(T)I_0^2 \Rightarrow P_R = R_e e^{\alpha(T-T_e)}I_0^2$

b. En régime permanent : $P_e + P_R(T_e) - P_{th}(T_e) = 0 \Leftrightarrow P_e + R_e I_0^2 - G_{th}(T_e - T_0) = 0 \Leftrightarrow$

$T_e = T_0 + \frac{P_e + R_e I_0^2}{G_{th}}$

15. Bilan thermique pour l'absorbeur pour t ≥ 0 hors équilibre :

$(P_e + p)dt + P_R dt - P_{th}dt = \delta Q \Leftrightarrow (P_e+p)dt + RI_0^2 dt - G_{th}(T-T_0)dt = c_{th}dT$

Si on développe R(T) au premier ordre en $\alpha\theta$, on a : $R = R_e e^{\alpha(T-T_e)} \approx R_e(1+\alpha\theta)$

soit $(P_e + p)dt + R_e(1+\alpha\theta)I_0^2 dt - G_{th}(T-T_0)dt = c_{th}d\theta$

$$\Leftrightarrow \quad (P_e + p) + R_e(1+\alpha\theta)I_0^2 - G_{th}(\theta + T_e - T_0) = c_{th}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{th}\frac{d\theta}{dt} + \left(G_{th} - R_e\alpha I_0^2\right)\theta = p + P_e + R_e I_0^2 - G_{th}(T_e - T_0)$$

Compte tenu de la relation établie à la question 14. b., le bilan thermique s'écrit en définitive :

$$c_{th}\frac{d\theta}{dt} + \left(G_{th} - R_e\alpha I_0^2\right)\theta = p$$

16. On pose $\tau_d = \dfrac{c_{th}}{G_{th} - R_e\alpha I_0^2}$.

La solution générale de l'équation précédente s'écrit : $\theta = \dfrac{p}{G_{th} - R_e\alpha I_0^2} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau_d}} = \dfrac{\tau_d p}{c_{th}} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau_d}}$

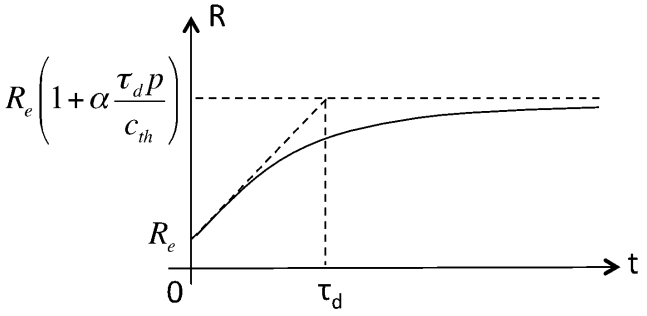
La condition initiale $\theta(0) = 0 = \dfrac{\tau_d p}{c_{th}} + \lambda$ conduit à l'expression : $\theta = \dfrac{\tau_d p}{c_{th}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right)$

17. Le détecteur est stable si le terme exponentiel est fonction décroissante de t soit :

$$\tau_d = \frac{c_{th}}{G_{th} - R_e\alpha I_0^2} > 0 \Leftrightarrow I_0 < \sqrt{\frac{G_{th}}{R_e\alpha}}$$

$$R \approx R_e(1+\alpha\theta) \Rightarrow R \approx R_e\left[1 + \alpha\frac{\tau_d p}{c_{th}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right)\right] \text{ d'où } \left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=0} = \frac{R_e\alpha p}{c_{th}}$$

On en déduit l'allure du graphe représentant R(t) :



18. Le temps τ_d est représentatif du <u>temps de réponse</u> du bolomètre. On doit *a priori* chercher à <u>diminuer ce temps</u> pour augmenter la réactivité du montage.

En particulier, on doit avoir $\tau_d << \tau$ si on veut étudier les fluctuations de température envisagées dans la partie 1.

19. Le montage électronique équivalent serait un <u>circuit RC série soumis à un échelon de tension</u> E ; la tension de sortie du montage (tension aux bornes du condensateur) s'écrit sous une forme analogue à la variation de température enregistrée par le bolomètre sous l'effet de la perturbation *p*, soit $u_c = E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$.

20. La relation du pont diviseur de tension ou le théorème de Millman conduisent aux relations :

$$V_A = \frac{V_e}{2} \text{ et } V_B = \frac{R}{R_0+R}V_e \text{ d'où } V_{AB} = V_A - V_B = \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{R_0+R}\right)V_e \Leftrightarrow V_{AB} = \frac{R_0-R}{2(R_0+R)}V_e$$

21. a. Les amplificateurs idéaux fonctionnent en régime linéaire. Les tensions différentielles et les courants d'entrée sont donc nuls.

On s'intéresse à l'amplificateur de droite. Le théorème de Millman appliqué aux entrées inverseuse et non-inverseuse s'écrit :

$$V_- = \frac{\frac{V_S}{R_2}+\frac{V_C}{R_2}}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow V_- = \frac{1}{2}(V_S+V_C) \quad \text{et} \quad V_+ = \frac{\frac{0}{R_2}+\frac{V_D}{R_2}}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}} \Leftrightarrow V_+ = \frac{V_D}{2}$$

or $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$ d'où $\frac{1}{2}(V_S+V_C) - \frac{V_D}{2} = 0 \Leftrightarrow V_S = V_D - V_C$

La partie du circuit à droite des nœuds C et D est un montage <u>soustracteur</u>.

b. On s'intéresse aux amplificateurs de gauche en haut (noté H) et en bas (noté B). Le théorème de Millman appliqué aux entrées inverseuse s'écrit :

$$V_{H-} = \frac{\frac{V_C}{R_1}+\frac{V_{B-}}{R_g}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_g}} \text{ or } V_{H-} = V_{H+} = V_A \text{ d'où } \frac{R_1+R_g}{R_1R_g}V_A = \frac{V_C}{R_1}+\frac{V_B}{R_g} \quad (1)$$

$$V_{B-} = \frac{\frac{V_D}{R_1}+\frac{V_{H-}}{R_g}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_g}} \text{ or } V_{B-} = V_{B+} = V_B \text{ d'où } \frac{R_1+R_g}{R_1R_g}V_B = \frac{V_D}{R_1}+\frac{V_A}{R_g} \quad (2)$$

(1) – (2) $\Rightarrow$ $\frac{R_1+R_g}{R_1R_g}(V_A-V_B) = \frac{V_C-V_D}{R_1}+\frac{V_B-V_A}{R_g} \Leftrightarrow \frac{2R_1+R_g}{R_1R_g}V_{AB} = -\frac{V_S}{R_1} \Leftrightarrow V_S = -\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)V_{AB}$

or $V_{AB} = \frac{R_0-R}{2(R_0+R)}V_e$ d'où $V_S = -\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)\frac{R_0-R}{2(R_0+R)}V_e$

Lorsque p = 0, $R = R_e$. Pour avoir $V_S = 0$, il faut donc choisir $R_0 = R_e$

c. Pour $t >> \tau_d$, on a $\theta = \frac{\tau_d p}{c_{th}}$ et $R = R_e e^{\alpha\frac{\tau_d p}{c_{th}}} \approx R_e\left(1+\frac{\alpha\tau_d p}{c_{th}}\right)$

D'autre part, l'hypothèse $|\alpha\theta| << 1$ permet d'écrire $R \approx R_e$

On a alors $V_S = -\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)\frac{R_e - R}{2(R_e+R)}V_e \approx -\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)\frac{R_e-R}{4R_e}V_e \Rightarrow V_S = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)\frac{\alpha\tau_d p}{c_{th}}V_e$

$\Leftrightarrow G = \left|\frac{V_S}{p}\right| = \frac{1}{4}\left(1+\frac{2R_1}{R_g}\right)\frac{\alpha\tau_d}{c_{th}}V_e$

d. $G = \frac{1}{2}(1+2)\frac{20\times 2,4.10^{-3}}{3,0.10^{-11}}\times 10 \Rightarrow G = 2,4.10^{10}\ V.W^{-1}$

22. Pour un fluide newtonien en écoulement plan, la force surfacique tangentielle de cisaillement exercée par une couche de fluide sur la couche du dessus s'écrit:

$$\vec{\tau} = -\eta\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\eta\frac{\partial u_x(z)}{\partial z}\vec{e}_x$$

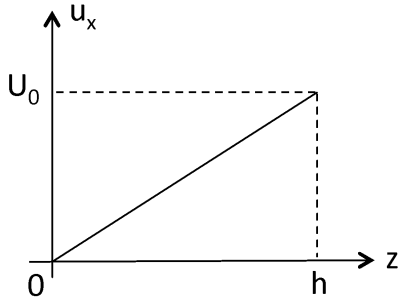
Compte tenu du principe des actions réciproques, et de l'uniformité supposée de la pression dans le fluide, le bilan en quantité de mouvement s'écrit :

$$-\eta\frac{\partial u_x}{\partial z}\bigg|_z S + \eta\frac{\partial u_x}{\partial z}\bigg|_{z+dz} S = \rho S dz\frac{\partial u_x}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

or $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$ en régime stationnaire d'où $\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = a \Leftrightarrow u_x = az + b$

soit, en supposant $u_x(z=0) = 0$ (non donné par l'énoncé) et $u_x(z=h) = U_0$, $u_x = \frac{U_0}{h}z$

Le profil de vitesse $u_x(z)$ est donc <u>linéaire</u> :



23. a. Les forces de viscosité ont pour effet de ralentir les veines rapides, et d'accélérer les veines lentes. On a ainsi :

$$\vec{F}_z = -\upsilon_t(z)\rho S\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_z \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{z+dz} = \upsilon_t(z+dz)\rho S\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z+dz}\vec{e}_x$$

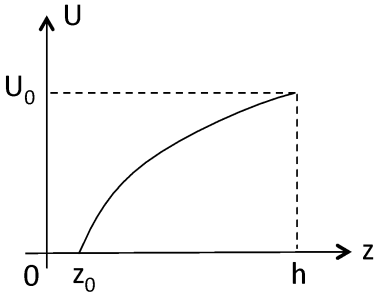
b. On reprend le bilan précédent en substituant la viscosité turbulente à la viscosité cinématique.

$$-\upsilon_t(z)\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_z \rho S + \upsilon_t(z+dz)\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z+dz}\rho S = \rho S dz\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\upsilon_t\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa^2 z^2\left|\frac{dU}{dz}\right|\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow z^2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = A \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{A}{z} \Leftrightarrow U = A\ln z + B$$

$U_0 = A\ln h + B$ et $0 = A\ln z_0 + B$ d'où $A = \dfrac{U_0}{\ln\dfrac{h}{z_0}}$ $B = -\dfrac{U_0 \ln z_0}{\ln\dfrac{h}{z_0}}$ et $U = \dfrac{U_0}{\ln\dfrac{h}{z_0}}\ln\dfrac{z}{z_0}$; on en déduit

$\dfrac{dU}{dz} = \dfrac{U_0}{z\ln\dfrac{h}{z_0}}$ $\left.\dfrac{dU}{dz}\right|_{z=z_0} = \dfrac{U_0}{z_0\ln\dfrac{h}{z_0}}$ et $\left.\dfrac{dU}{dz}\right|_{z=h} = \dfrac{U_0}{h\ln\dfrac{h}{z_0}}$ d'où l'allure du profil de vitesse U(z) :



24. Le nombre de Reynolds Re_p associé à un écoulement autour d'un obstacle (ou dans une conduite) caractérise la nature de cet écoulement.

$Re_p << 1$ correspond à un écoulement <u>laminaire</u> ;

$Re_p >> 1$ correspond à un écoulement <u>turbulent</u>.

25. D'après le graphique $C_d = \dfrac{\alpha}{\mathrm{Re}_p}$ pour $\mathrm{Re}_p << 1$.

V est d'après l'énoncé une « valeur caractéristique de la vitesse relative du fluide par rapport au grain » ; on écrira donc $V = \beta.\left\|\vec{U} - \vec{v}_g\right\|$ où β est un facteur compris entre 0,1 et 10 (vraisemblablement…).

Ainsi $\vec{F}_d = \dfrac{1}{2}C_d\rho_f\dfrac{\pi}{4}d^2\left\|\vec{U} - \vec{v}_g\right\|.\left(\vec{U} - \vec{v}_g\right)$ or $\mathrm{Re}_p = \dfrac{Vd}{\upsilon}$ et $C_d = \dfrac{\alpha}{\mathrm{Re}_p}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_d = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha\upsilon}{Vd}\rho_f\dfrac{\pi}{4}d^2\dfrac{V}{\beta}.\vec{v}_{g/fluide}$ d'où $\vec{F}_d = -\dfrac{\alpha}{4\beta}\eta\pi\dfrac{d}{2}.\vec{v}_{g/fluide}$

Loi de <u>Stokes</u> : $\vec{F}_d = -6\pi\eta\dfrac{d}{2}.\vec{v}_{g/fluide}$

Les deux expressions coïncident pour $\dfrac{\alpha}{4\beta} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = 24$.

Sur le graphique, on lit $\mathrm{Re}_p = 0,1 \Rightarrow C_d \approx 220$ d'où $\alpha = \mathrm{Re}_p.C_d \approx 22$ ce qui correspondrait à $\beta = \dfrac{22}{24} \approx 1$, correct compte tenu de l'ordre de grandeur supposé pour ce paramètre.

26. a. $\mathrm{Re}_p >> 1 \Rightarrow C_D = 0,4$ et $\vec{F}_d = 0,05\rho_f\pi d^2\left\|\vec{U} - \vec{v}_g\right\|.\left(\vec{U} - \vec{v}_g\right)$

b. Principe fondamental de la dynamique appliqué au grain de sable dans le référentiel martien supposé galiléen :

$$\vec{F}_d = m_g \frac{d\vec{v}_g}{dt} \Leftrightarrow 0,05\rho_f \pi d^2 \left\|\vec{U} - \vec{v}_g\right\| . \left(\vec{U} - \vec{v}_g\right) = \rho_g \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8} \frac{d\vec{v}_g}{dt}$$

$$\Leftrightarrow 0,3\rho_f w^2 = -\rho_g d \frac{dw}{dt} \Leftrightarrow -\frac{0,3\rho_f}{d\rho_g} dt = \frac{dw}{w^2}$$

Soit, par intégration entre t = 0 et t > 0 quelconque :

$$-\frac{0,3\rho_f}{d\rho_g} t = -\frac{1}{w} + \frac{1}{U} \Leftrightarrow \frac{1}{w} = \frac{1}{U} + \frac{0,3\rho_f}{d\rho_g} t \Leftrightarrow w = \frac{U}{1+\gamma U t} \text{ en posant } \gamma = \frac{0,3\rho_f}{d\rho_g}$$

d'où $U - v_g = \frac{U}{1+\gamma U t} \Leftrightarrow v_g = U - \frac{U}{1+\gamma U t} \Leftrightarrow v_g = \frac{\gamma U^2 t}{1+\gamma U t}$

c. $v_g = \frac{dl}{dt} = \frac{\gamma U^2 t}{1+\gamma U t} \Leftrightarrow \int_0^l dl = \int_0^t \frac{\gamma U^2 t}{1+\gamma U t} dt$; on pose $x = \gamma U t \Rightarrow dx = \gamma U dt$

$$l = \frac{1}{\gamma}\int_0^x \frac{x}{1+x} dx \Leftrightarrow l = \frac{1}{\gamma}\left[x - \ln(1+x)\right]_0^x \Leftrightarrow l = \frac{1}{\gamma}\left[x - \ln(1+x)\right] \Leftrightarrow l = Ut - \frac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma U t)$$

d. $v_g = \frac{\gamma U^2 t}{1+\gamma U t} = 0,9U \Leftrightarrow \gamma U^2 t = 0,9U + 0,9\gamma U^2 t \Leftrightarrow t = \frac{9}{\gamma U}$

On a alors $l = U\frac{9}{\gamma U} - \frac{1}{\gamma}\ln\left(1+\gamma U \frac{9}{\gamma U}\right) \Leftrightarrow l = \frac{1}{\gamma}\left[9 - \ln(1+9)\right] \Leftrightarrow l = \frac{6,7}{\gamma} \Leftrightarrow l = \frac{6,7 d\rho_g}{0,3\rho_f}$

$$\Leftrightarrow l = 22,3\frac{d\rho_g}{\rho_f} \text{ soit } l = \zeta L_d \text{ avec } L_d = \frac{\rho_g}{\rho_f} d \text{ et } \zeta = 22$$

27. a. Gaz parfait $\Rightarrow p_M V = n_{CO_2} RT \Leftrightarrow \rho_M = \frac{p_M M_{CO_2}}{RT}$

$$\rho_M = \frac{6.10^2 \times 44.10^{-3}}{8,3 \times 2,0.10^2} = \frac{132.10^{-3}}{8,3} \Rightarrow \rho_M = 0,016\ kg.m^{-3}$$

Pour l'atmosphère terrestre $\rho_T = \frac{p_T M_T}{RT_T} = \frac{10^5 \times 29.10^{-3}}{8,3 \times 290} = \frac{10}{8,3} \Rightarrow \rho_T = 1,2\ kg.m^{-3}$

$\frac{\rho_T}{\rho_M} \approx 75$: l'atmosphère martienne est environ 75 fois moins dense que l'atmosphère terrestre.

b. $L_d = \frac{\rho_g}{\rho_f} d$ or $\frac{\rho_T}{\rho_M} \approx 75$ d'où $L_{dM} = 75 L_{dT}$; Les dunes martiennes ont une largeur minimale environ 75 fois plus importante que celle des dunes terrestres.

28. Bilan volumique sur la durée dt : $dV = \Phi_e dt - \Phi_s dt \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \psi QW - Q(\alpha W + \beta)$

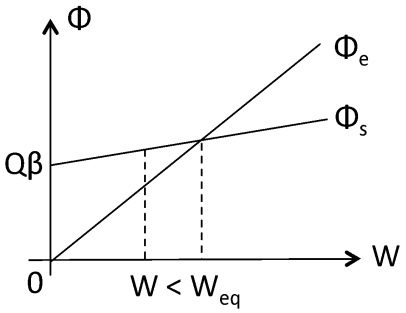
$V = \gamma W^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3\gamma W^2 \frac{dW}{dt}$ d'où $3\gamma W^2 \frac{dW}{dt} = \psi QW - Q(\alpha W + \beta)$

29. a. A l'équilibre $W = W_{eq} = cte \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 0$ d'où $0 = \psi QW_{eq} - Q(\alpha W_{eq} + \beta) \Leftrightarrow W_{eq} = \frac{\beta}{\psi - \alpha}$

Il existe une <u>largeur d'équilibre</u> pour $W_{eq} > 0$ soit $\beta > 0$ et $\alpha < \psi$ ou $\beta < 0$ et $\alpha > \psi$.

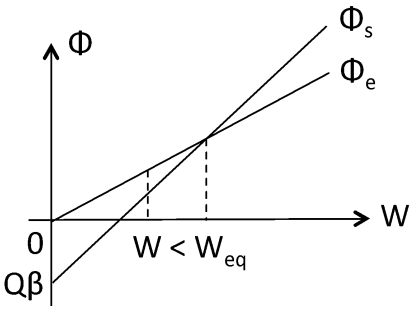
$\Phi_e = \psi QW \Rightarrow \Phi_{eq} = \frac{\psi Q\beta}{\psi - \alpha}$

b. <u>1er cas</u> : $\beta > 0$ et $\alpha < \psi$



Une diminution de Φ_e entraîne une diminution de W. On a alors $\Phi_e < \Phi_s$ et donc W diminue : on s'écarte irrémédiablement de l'équilibre et W → 0 lorsque t → +∞.

<u>2ème cas</u> : $\beta < 0$ et $\alpha > \psi$



Une diminution de Φ_e entraîne une diminution de W. On a alors $\Phi_e > \Phi_s$ et donc W augmente : on est ramené vers l'équilibre.

La position d'<u>équilibre</u> est donc <u>stable</u> pour $\beta < 0$ et $\alpha > \psi$.

30. a. $\frac{dV}{dt} = \Phi_e - \Phi_s + \Phi_c$

$\Leftrightarrow 3\gamma W^2 \frac{dW}{dt} = \psi QW - Q(\alpha W + \beta) - \eta N\gamma W_{eq}^2 \frac{W + W_{eq}}{W} \alpha Q(W - W_{eq})$ or $0 = \psi QW_{eq} - Q(\alpha W_{eq} + \beta)$

d'où $3\gamma W^2 \frac{dW}{dt} = \psi Q(W - W_{eq}) - Q\alpha(W - W_{eq}) - \eta N \gamma W_{eq}^2 \frac{W + W_{eq}}{W} \alpha Q(W - W_{eq})$

et $W = W_{eq}(1+\varepsilon)$ soit $3\gamma W_{eq}^3 (1+\varepsilon)^2 \frac{d\varepsilon}{dt} = \psi Q W_{eq} \varepsilon - Q\alpha W_{eq} \varepsilon - \eta N \gamma W_{eq}^3 \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \alpha Q \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{3\gamma W_{eq}^2}{(\psi - \alpha)Q} \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\eta N \gamma W_{eq}^2 \alpha}{(\psi - \alpha)}\right] \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\gamma W_{eq}^2}{(\psi - \alpha)Q} \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} . \eta N . \frac{2\gamma W_{eq}^2 \alpha}{(\psi - \alpha)}\right] \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$

Enfin $W_{eq} = \frac{\beta}{\psi - \alpha}$ d'où $\frac{3\gamma W_{eq}^3}{\beta Q} \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} . \eta N . \frac{2\gamma W_{eq}^3 \alpha}{\beta}\right] \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$

On retrouve bien le bilan sous la forme donnée par l'énoncé :

$$\tau_b \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \frac{\eta N}{N_c}\right] \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$$ avec $\tau_b = \frac{3\gamma W_{eq}^3}{\beta Q}$ et $N_c = \frac{\beta}{2\alpha\gamma W_{eq}^3}$

b. $\tau_b = \frac{3\gamma W_{eq}^3}{\beta Q} = \frac{3 \times 10^{-2} \times 10^6}{5 \times 50} \Rightarrow \tau_b = 120\ ans$

31. a. Par développement au premier ordre de l'équation obtenue à la question 30.a. , on obtient : $\tau_b \frac{d\varepsilon}{dt} \approx \left[1 - \frac{\eta N}{N_c}\right] \varepsilon$

b. Les barchanes sont stabilisées par les collisions (W tend vers $W_{éq}$) si la solution générale de l'équation obtenue à la question 31.a. est convergente ($\varepsilon \to 0$ lorsque $t \to +\infty$).

$\tau_b \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{\eta N}{N_c}\right] \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \lambda e^{-\frac{\frac{\eta N}{N_c} - 1}{\tau_b} t}$, convergente ssi $\frac{\eta N}{N_c} - 1 > 0$ soit $N > \frac{N_c}{\eta}$