

(Ce problème est plus difficile que ne le pensait le rédacteur car celui-ci a oublié que la notion de choc n'est plus traitée dans la filière PC de même d'ailleurs que les modèles de gaz parfait en géométrie sphérique ...)

Quelques aspects de physique granulaire

I – Collisions individuelles

1. Ordres de grandeurs

(a) – $e_c = mgd$ où $d = 2a$

(b) – $\langle e_{ch} \rangle = 3k_B T/2$

(c) – On compare e_c et $\langle e_{ch} \rangle$, l'égalité $2mga = 3k_B T/2$ donne pour $a = 1$ mm une température de $2.5 \cdot 10^{15}$ K ! c'est toujours la pesanteur qui l'emportera sur l'agitation thermique pour les particules macroscopiques et pour une température $T = 300$ K, les phénomènes sont comparables pour un rayon $a = 2.95 \cdot 10^{-7}$ m, en dessous c'est l'agitation thermique qui prédomine.

(d) – Pour ce couple de paramètre c'est la force macroscopique de pesanteur qui contrôle les trajectoires. (Mais il manque la discussion du paramètre densité de particules pour discuter des collisions nécessaires à l'agitation thermique).

2. Collisions inélastiques

(a) – Dans une collision élastique il y a conservation de l'énergie cinétique au cours de la collision. Soit $\varepsilon = 1$ (justification en (c)).

(b) – C'est en fait la définition de la collision en considérant le système comme isolé durant l'interaction de collision. Ici on le retrouve en calculant : $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) = m(\mathbf{v}'_{1t} + \mathbf{v}'_{1n} + \mathbf{v}'_{2t} + \mathbf{v}'_{2n}) = m(\mathbf{v}_{1t} - \varepsilon \mathbf{v}_{1n} + \mathbf{v}_{2t} - \varepsilon \mathbf{v}_{2n}) = m(\mathbf{v}_{1t} + \mathbf{v}_{2t}) - \varepsilon m(\mathbf{v}_{1n} + \mathbf{v}_{2n})$ or dans un référentiel barycentrique $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, soit $\mathbf{v}_{1t} + \mathbf{v}_{2t} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v}_{1n} + \mathbf{v}_{2n} = \mathbf{0}$, le référentiel reste barycentrique après la collision.

(c) – $\Delta E_c = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}'_1{}^2 + \mathbf{v}'_2{}^2 - \mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2^2) = m (\varepsilon^2 - 1) v_n^2$. $\Delta E_c < 0$, pertes sous forme d'échauffement local, de déformation permanente ... On retrouve $\varepsilon = 1$ pour la définition d'un choc élastique sans perte d'énergie cinétique.

(d) – Si le mur est parfaitement immobile, lisse et indéformable à l'échelle d'un grain, c'est la situation précédente avec le grain noir infiniment massif et immobile ? Le référentiel barycentrique coïncidant avec le mur ... (argument de symétrie ?? Sinon c'est un argument statistique avec un grand nombre de choc de grains

sur une paroi qui établit ce résultat). Le même calcul que précédemment en prenant $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0}$ donne $\Delta E_c = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}'_1{}^2 - \mathbf{v}_1^2) = \frac{1}{2} m (\varepsilon^2 - 1) v_n^2$.

(e) – Avec les équations évidentes : $\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh_0$; $v_1 = \varepsilon v_0$ et $\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh_1$ on obtient $h_1 = \varepsilon^2 h_0$ et en rajoutant $t = (2h/g)^{1/2}$ on complète :

$$\tau_0 = (1 + \varepsilon) (2h_0/g)^{1/2} \quad \text{et} \quad \Delta E_c = (\varepsilon^2 - 1)gh_0.$$

(f) – Après n rebonds : $h_n = \varepsilon^{2n} h_0$ et $\tau_n = (1 + \varepsilon) \varepsilon^n (2h_0/g)^{1/2}$.

(g) – On en déduit $t_n = \tau_0 + \dots + \tau_{n-1} = (1 + \varepsilon) (2h_0/g)^{1/2} (1 - \varepsilon^n)/(1 - \varepsilon)$. La limite infinie donne $t_\infty = (2h_0/g)^{1/2} (1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ alors qu'évidemment $h_\infty = 0$.

(h) – A.N. : Pour la bille $t_\infty = 8.6$ s et pour le ballon $t_\infty = 1.8$ s.

3. Collapse inélastique de 3 grains sur un axe

(a) – Si on étudie des collisions de points matériels on néglige évidemment la gravité et la quantité de mouvement est conservée. On obtient alors le système d'équation :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= u'_1 + u'_2 \\ u'_2 - u'_1 &= -\varepsilon(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'_1 = \frac{(1 - \varepsilon)u_1 + (1 + \varepsilon)u_2}{2} \\ u'_2 = \frac{(1 + \varepsilon)u_1 + (1 - \varepsilon)u_2}{2} \end{cases}$$

(b) – La relation du barycentre impose $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, dans un choc entre deux particules la somme des quantités de mouvement des deux particules concernées est conservée alors que la troisième reste isolée durant ce très court instant, la somme des quantités de mouvement des trois reste constante donc : $u_1 + u_2 + u_3 = u'_1 + u'_2 + u_3 = u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0$

(c) – La première collision est la collision 1 – 2 aboutissant à u'_1 et u'_2 tandis que u_3 reste invariante, puis aura lieu la collision 2 – 3 aboutissant à u'_2 et u'_3 tandis que u'_1 reste invariante.

(d) – Lors de la première collision u'_1 prend la valeur du (a) alors que u''_2 prend la valeur notée u'_2 dans (a). On étudie alors la seconde collision :

$$\begin{cases} u'_2 = \frac{(1 + \varepsilon)u_3 + (1 - \varepsilon)u'_2}{2} = \frac{(1 + \varepsilon)(-u_1 - u_2) + (1 - \varepsilon)u'_2}{2} \\ u'_3 = \frac{(1 + \varepsilon)u'_2 + (1 - \varepsilon)u_3}{2} = \boxtimes \end{cases}$$

Soit tous calculs faits : $u'_2 = -\frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{4} u_1 - \frac{1 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4} u_2$, en calculant u'_3 on vérifie que $\Sigma u'_i = 0$.

(e) – La relation (u'_1, u'_2) fonction de (u_1, u_2) peut prendre une forme matricielle,

cette matrice admet comme polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - (1 - 6\varepsilon + \varepsilon^2)\lambda/4 + \varepsilon^2$, pour le calcul des valeurs propres le discriminant est $\Delta = (1 + \varepsilon)^2(\varepsilon^2 - 14\varepsilon + 1)/16$ qui sera positif si $\varepsilon < 7 - 4\sqrt{3}$ compte tenu du fait que $0 < \varepsilon < 1$. (Intérêt de la question ?)

4. Collision inélastique avec frottement

(a) – Par des bilans avant / après choc on obtient :

$$\begin{cases} m(v' - v) = Y \\ m(u' - u) = X \\ I(\omega' - \omega) = -aY \end{cases}$$

(b) – On dénombre les inconnues (v' , u' , ω' , X et Y), il y a donc deux relations à ajouter : $u' = -u$ pour la nature du choc et la relation de frottement entre T et N soit entre X et Y (glissement : $|Y| = \mu|X|$ ou non glissement : $|Y| < \mu|X|$ et $v_g(I) = 0$).

(c) – Cas du glissement, on prend $v > 0$ et $v_g > 0$ donc $T < 0$ donc $Y < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} u' &= -\varepsilon u & u' &> 0 \\ X &= -m(1 + \varepsilon)u & X &> 0 \\ Y &= +\mu m(1 + \varepsilon)u & Y &< 0 \\ v' &= v + \mu(1 + \varepsilon)u & v' &< v \\ \omega' &= \omega - 5\mu(1 + \varepsilon)u/2a & \omega' &> \omega \end{aligned}$$

(d) – La vitesse de glissement au départ est $v_g = v - a\omega > 0$ par exemple, en fin de choc $v_g' = v' - a\omega' = v - a\omega + 7\mu(1 + \varepsilon)u/2$ encore positif si :

$$|u| < \frac{2(v - a\omega)}{7\mu(1 + \varepsilon)}$$

(e) – Les équations se réécrivent :

$$\begin{aligned} u' &= -\varepsilon u & u' &> 0 \\ X &= -m(1 + \varepsilon)u & X &> 0 \end{aligned}$$

En résolvant les autres équations avec $v' = a\omega'$, on obtient :

$$Y = -2m(v - a\omega)/7$$

$$\text{D'où } v' = (5v + 2a\omega)/7$$

$$\omega' = (2\omega + 5v/a)/7$$

La condition : $|Y| < \mu|X|$ s'écrit $v - a\omega < 7\mu(1 + \varepsilon)|u|/2$

(f) – Les deux domaines sont contigus.

(g) – Collision avec glissement permanent :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(\varepsilon^2 - 1)u^2 + 7m\mu^2(1 + \varepsilon)^2 u^2/4 + m\mu(1 + \varepsilon)(v - a\omega)u < 0$$

Alors qu'avec glissement partiel :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(\varepsilon^2 - 1)u^2 - m(v - a\omega)^2/7 < 0 \text{ (s'annule si } v = a\omega \text{ dès le début et } \varepsilon = 1) \text{ .}$$

sauf erreur !!

II – Assemblée de grains interagissant entre eux et avec une paroi

1. Equilibre stationnaire d'une colonne vibrante

(a) – Cette température s'exprime en m^2s^{-2} .

(b) – En utilisant la fonction de distribution :

$$dN = \int_{u_y} \int_{u_z} \int_{u_x < 0} f(r, u, t) u_x dt dS d\tau_u$$

$$dp_x = (1 + \varepsilon)m \int_{u_y} \int_{u_z} \int_{u_x < 0} f(r, u, t) u_x^2 dt dS d\tau_u$$

(c) – les autres projections donneront 0 par l'intégration des produits $u_x u_y$ et $u_x u_z$. Sur les parois verticales $\varepsilon = 1$. Alors $p(-L/2, y, z) = p(z) = dp_x/dt/dS = 2m \frac{1}{2} n(z) \langle u_x^2 \rangle$, le $\frac{1}{2}$ pour tenir compte de l'intégration sur la moitié seulement des valeurs possibles de u_x . Si on ajoute l'hypothèse d'isotropie des vitesses $\langle u_x^2 \rangle = 1/3 \langle u^2 \rangle = T_g(z)$, alors $p(z) = n(z)mT_g(z)$ c'est l'équation des gaz parfaits où p est proportionnel au produit nT .

(d) – Pour la tranche on fait le bilan des quantités de mouvement des particules entrantes et sortantes par unité de temps par la face du haut et la face du bas, on

obtient l'équation d'équilibre habituelle dont la solution est : $p(z) = p(0)e^{-\int_0^z \frac{gdz}{T_g(z)}}$

. La pression est un bilan d'échange de quantité de mouvement et non d'énergie cinétique, ce qui fait que ε n'intervient pas.

(e) – Pour une particule $\Delta E_c = \frac{1}{2} m(\varepsilon^2 - 1)u_z^2$, pour la sommation on adapte la relation du (b) :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(\varepsilon^2 - 1) \int_{u_x} \int_{u_y} \int_{u_z < 0} f(r, u) u_z^3 dt L^2 d\tau_u$$

(f) – Le calcul se fait en utilisant les intégrales données en préliminaire et le résultat est : $\Delta E_c = m(\varepsilon^2 - 1)n(0)T_g(0)^{3/2}L^2 dt/(2\pi)^{1/2}$.

(g) – En définissant $Q = \Delta E_c/dt$ il vient $D = m(1 - \varepsilon^2)/(2\pi)^{1/2}$.

(h) – Avec la solution $T_g(z) = T_0$ on obtient $p(z) = p(0) \exp(-gz/T_0)$ puis $n(z) = p(0) \exp(-gz/T_0)/(mT_0)$, en normalisant à N le nombre de particules dans la boîte : $p(0) = Nm g/L^2$, ce qui est logique ! En reportant $n(0)$ dans l'expression de Q il vient : $Q = DNgT_0^{1/2}$.

2. Démon de Maxwell

(a) – Bien sûr : $N_0 = N_A + N_B$ ce qui combiné avec α donnera $N_A = N_0(1 + \alpha)/2$ et $N_B = N_0(1 - \alpha)/2$.

(b) – Le flux $F_A = dN_A/dt$ de la qu. 1.(b) :

$$F_A = S \int_{u_y} \int_{u_z} \int_{u_x > 0} \frac{n_A(h)}{(2\pi T_A)^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2T_A}} u_x d\tau_u$$

$$F_A = S \frac{N_A g}{L^2 T_A} e^{-\frac{gh}{T_A}} \frac{1}{(2\pi T_A)^{3/2}} \int_{u_y} e^{-\frac{u_y^2}{2T_A}} du_y \int_{u_z} e^{-\frac{u_z^2}{2T_A}} du_z \int_{u_x > 0} e^{-\frac{u_x^2}{2T_A}} u_x du_x$$

Soit :

$$F_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{S N_A g}{L^2 T_A^{1/2}} e^{-\frac{gh}{T_A}}$$

Tous calculs faits : et une expression analogue pour F_B .

(c) – $d\alpha/dt = 2(F_B - F_A)/N_0$ avec les expressions de F_A et F_B précédente en remplaçant les températures T_A et T_B par leur expression en fonction de $Q, D \dots$ de la qu. 1.(h) on obtient l'équation différentielle proposée avec :

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{S D g^2 N_0}{L^2 Q} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{g^3 h D^2 N_0^2}{4 Q^2}$$

On vérifie que C_2 est sans dimension alors que C_1 est l'inverse d'un temps.

(d) – La valeur $\alpha = 0$ annule bien la dérivée $d\alpha/dt$. En développant l'équation différentielle à l'ordre 2 en α , on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4C_1(C_2 - 1)e^{-C_2}\alpha$$

qui est bien de signe contraire à α pour une stabilité autour de 0 si $C_2 < 1 = C_2^{\text{cr}}$.

(e) – En poursuivant le D.L. (merci Maple) :

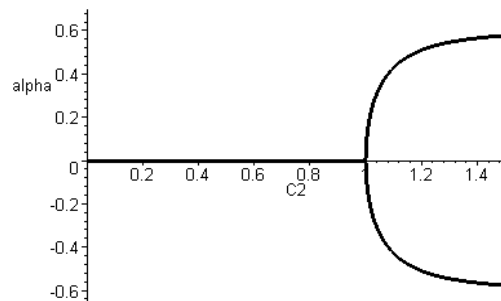
$$\frac{d\alpha}{dt} = 4C_1 \alpha e^{-C_2} \left[(C_2 - 1) + \frac{C_2}{3} (6 - 9C_2 + 2C_2^2) \alpha^2 + \dots \right]$$

Alors on retrouve une stabilité possible, $d\alpha/dt < 0$ si le crochet est négatif c'est à

$$\alpha > \sqrt{\frac{3(1 - C_2)}{C_2(6 - 9C_2 + 2C_2^2)}} \quad \text{ou} \quad \alpha < -\sqrt{\dots}$$

dire si $C_2 > 1$ et

(f) – Voilà le schéma d'une bifurcation d'équilibre :



(g) – Une solution stationnaire avec $\alpha \neq 0$ violerait le principe de minimum d'enthalpie libre pour le système global.

III – Ecoulement de grains

1. Film liquide

(a) – $u(x, 0, t) = w(x, 0, t) = 0$ dans un écoulement visqueux.

$$\left(-\frac{\partial h/\partial x}{1 + (\partial h/\partial x)^2} \quad \frac{1}{1 + (\partial h/\partial x)^2} \right)$$

(b) – Le vecteur $\mathbf{n}$ s'écrit au premier ordre

(c) – $\text{div } \mathbf{v} = 0$ en régime stationnaire incompressible, soit $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$ or la solution recherchée est invariante en x donc $\partial w/\partial z = 0$, w est constante et nulle en $z = 0$ donc nulle partout.

(d) – En projetant l'équation de Navier Stokes sur z (sol. station. et invar. en x) :

$$0 = -(1/\rho)(\partial p/\partial z) - g \cos \alpha \quad \text{et} \quad p_0(h) = p_a \quad \text{soit} \quad p_0(z) = -\rho g \cos \alpha (z - h) + p_a.$$

Projection sur Ox :

$$0 = 0 + g \sin \alpha + \nu(\partial^2 u/\partial z^2) \quad \text{et} \quad (u_0(0) = 0, du/dz(h) = 0) : u_0(z) = -(g/\nu) \sin \alpha (z^2/2 - h_0 z)$$

(e) – La vitesse u_0 est maximum en $z = h_0$ et $u_{\text{max}} = u_0(h_0) = gh_0^2 \sin \alpha / 2\nu$.

(f) – On trouve $u_{\text{max}} = 380 \text{ ms}^{-1}$!!

(g) – $D_m = \rho \int_0^{h_0} u(z) L dz = (2\rho/3) u_{\text{max}} h_0 L = 5.1 \text{ tonne/s} \text{ !!! pour } L = 1 \text{ m.}$

2. Ondes progressives

(a) – Un bilan s'effectuerait sur une tranche de fluide comprise entre x et $x + dx$, en utilisant l'expression du débit obtenue en 1.(g) :

$$\frac{2\rho}{3} u(x, h(x, t), t) h(x, t) L - \frac{2\rho}{3} u(x + dx, h(x + dx, t), t) h(x + dx, t) L = \frac{d\delta m}{dt}$$

$$= \rho L dx \left(\frac{dh(x, t)}{dt} \right)$$

???

En calculant la vitesse verticale pour un point $M(x, h(x))$ à la surface du film $dh/dt = w_1(M, t) = \partial h(x, t)/\partial t + u(M, t) \partial h(M, t)/\partial x$?

(b) – Les variables primées sont adimensionnées.

(d) – $u'_0(z') = 2(z' - z'^2/2)$

(e) – Avec le changement de variable, au 1^{er} ordre pour les perturbations :

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t'} + u'_0 \frac{\partial u'_1}{\partial x'} + 2(1 - z')w'_1 = -\frac{2}{R_e} \frac{\partial p'_1}{\partial x'} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u'_1}{\partial z'^2} \right)$$

$$\frac{\partial w'_1}{\partial t'} + u'_0 \frac{\partial w'_1}{\partial x'} + 0 = -\frac{2}{R_e \delta^2} \frac{\partial p'_1}{\partial z'} + \frac{\delta}{R_e} \left(\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x'^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 w'_1}{\partial z'^2} \right)$$

(e) – Le nombre de Reynolds définit la transition laminaire / turbulent ou visqueux / convectif. Dans le cadre des hypothèses $\delta \ll 1$.

(f) – En annulant les membres de gauche rassemblant les termes inertiels dans les équations précédentes et en gardant les termes dominant en $1/\delta$, on obtient bien les deux relations indiquées.

(g) – Les résultats précédents, avec les dérivées secondes du même ordre et $\delta \ll 1$ impliquent l'inégalité forte proposée. En ce qui concerne la dérivée troisième de u'_1 ??

(h) – En $z' = 0$ on doit retrouver $w'_1(x', 0, t) = 0$ et $u'_1(x', 0, t) = 0$.

(i) – On écrit la relation matricielle de la surface (qu.1.(b)) avec la valeur approchée de n :

$$\begin{cases} \left(p_a - p + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right) + p_a - p + 2\rho v \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

L'introduction des variables adimensionnées et le développement au premier ordre des perturbations donne (sauf erreur de calcul ?) :

$$\begin{cases} -2\delta \left(-p'_1 + \cot(\alpha)(h'-1) + \frac{\partial u'_1}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x'} \right) + \left(2(1-h') + \frac{\partial u'_1}{\partial z'} + \delta^2 \frac{\partial w'_1}{\partial x'} \right) = 0 \\ -\frac{\delta}{2} \left(2(1-h') + \frac{\partial u'_1}{\partial z'} + \delta^2 \frac{\partial w'_1}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x'} \right) + \left(-p'_1 + \cot(\alpha)(h'-1) + \delta \frac{\partial w'_1}{\partial z'} \right) = 0 \end{cases}$$

Dans chaque équation on ne s'intéresse qu'au premier ordre pour les perturbations et au terme le plus bas en δ , ce qui amène les relations proposées.

(j) – Les solutions proposées sont en accord avec les conditions aux limites si les coefficients a_0 et b_0 sont nuls. L'incompressibilité de l'écoulement en régime stationnaire se traduit en variables réduites par : $\partial u'_1/\partial x' + \partial w'_1/\partial z' = 0$, ce qui donne par identification terme à terme :

$$b_n(x', t') = -\frac{1}{n} \frac{\partial a_{n-1}(x', t')}{\partial x'}$$

(k) – On a vu en (g) que $\partial^3 u'_1/\partial z'^3 = 0$, ce qui annule tous les a_n pour $n > 2$, comme $a_0 = 0$, il reste $u'_1(x', t') = a_1(x', t')z' + a_2(x', t')z'^2$. On passe alors à :

$$w'_1(x', t') = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x'} z'^2 - \frac{1}{3} \frac{\partial a_2}{\partial x'} z'^3$$

(l) – Du résultat de (f) on tire : $a_2(x', t') = \delta(\partial p'_1/\partial x')$ et en écrivant $u'_1(x', h', t')$ qu'on dérive ensuite par rapport à z' , il vient par les deux équations de (i) : $a_1(x', t') = 2(h'-1) - 2\delta z' \cot(\alpha) \partial h'/\partial x'$. Alors on reconstitue $u'_1(x', h', t')$ sous la forme proposée.

(m) – L'équation (1) s'écrit en variable adimensionnées :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + 2 \left(h' - \frac{h'^2}{2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'} = w'_1 = -h'^2 \frac{\partial h'}{\partial x'} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial h'}{\partial t'} + 2h' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0$$

le simple passage aux variables normales et l'expression de u_{max} fournit l'équation indiquée.

(n) – Par substitution et en ne gardant que les termes du premier ordre comme d'habitude on trouve : $\omega/k = gh_0^2 \sin(\alpha)/\nu = 2 u_{max}$. On en déduit $v_\phi = v_g = 2 u_{max}$.

3. Ecoulement granulaire

(a) – Si a est une longueur paramétrant la taille des grains, alors v_g est sans dimension. v_g pourrait être un paramètre de forme des grains ou de frottement des grains les uns sur les autres comme une viscosité de solides comme le laisse supposer le choix du symbole, mais l'équation n'est pas très explicite ...

(b) – En intégrant une première fois avec la condition $du/dz = 0$ à la surface comme

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{v_g a^2}} \sqrt{h_0 - z}$$

en 1.(d), on obtient : ; puis une nouvelle intégration avec

$$u(z) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{v_g a^2}} \left[h_0^{3/2} - (h_0 - z)^{3/2} \right]$$

$u(0)=0$:

$$u_{max} = u(h_0) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{v_g a^2}} h_0^{3/2}$$

(c) – Le rapport $u_{max}/\sqrt{gh_0}$ est proportionnel à h_0 d'après l'expression précédente ; sur le graphe on voit que c'est bien le cas pour les billes de verres mais pas pour les grains de sable.

(d) – En notant n le nombre de grains par unité de volume le flux de grains s'exprime sous la forme : $\varphi = \int_0^{h_0} n u(z) L dz$ pour une largeur $L = 1\text{ m}$; l'intégration qui suit donne : $\varphi = 2nu_{\max}h_0L/5$.

(e) –
$$v_\varphi = v_g = 2u_{\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{v_g a^2}} h_0^{3/2} .$$

Merci à A. Domps de son aide efficace.