

Espongo la mia proposta di soluzione e poi tento di documentare come ci sono arrivato. Le configurazioni possibili di aiuole interne si ottengono con la funzione ricorsiva:  $g(0)=1$ ,  $g(1)=4$ ,  $g(2)=5$ ,  $g(n)=g(n-1)+g(n-3)$

dove:

- $g(0)=1$  è l'unica configurazione possibile se il poligono è un triangolo equilatero
- $g(1)=4$  non è il numero di una configurazione ma serve a "far partire" la ricorsione
- $g(2)=5$  sono le configurazioni possibili nel caso il poligono regolare è un quadrato.

Quindi per un poligono regolare di "l" lati le configurazioni possibili sono:

- $g(0)$  per  $l=3$
- $g(l-2)$  per  $l>3$ .

Le configurazioni possibili che si ottengono con la funzione ricorsiva per l da 3 a 16 sono: 1, 5, 6, 10, 15, 21, 31, 46, 67, 98, 144, 211, 309, 453.

Mi sono fatto calcolare da un tool in rete la funzione generatrice e la sua forma chiusa.

Funzione generatrice:

$$(-1-3z-z^2)/(-1+z+z^3)$$

Sua forma chiusa:

$$f(n) \approx xy^n + vw^n + (2.1479 \cdot 1.46557^n).$$

La forma chiusa l'ho "compressa" per renderla leggibile; per eseguire i calcoli sostituire:

- $x \approx -(0.57395 + 0.368989i)$
- $y \approx (-0.232786 + 0.792552i)$
- $v \approx (-0.57395 + 0.368989i)$
- $w \approx (-0.232786 + 0.792552i)$

Inserendo la seguente stringa, con il valore di n desiderato si ottiene in numero di configurazioni:

$$x \cdot y^n + v \cdot w^n + 2.1479 \cdot 1.46557^n, x = -(0.57395 + 0.368989i), y = (-0.232786 + 0.792552i), v = (-0.57395 + 0.368989i), w = (-0.232786 + 0.792552i)$$

(ovviamente il risultato va arrotondato all'intero ma il valore che si ottiene lo approssima bene).

Sono giunto ad ipotizzare la funzione ricorsiva dall'output di due programmi che ho realizzato. I programmi generano in uscita le configurazioni possibili partendo da l=3 sino all'"l" desiderato.

Li ho codificati utilizzando due impostazioni diverse, per ottenere una doppia verifica; li allego:

<https://drive.google.com/file/d/1wig7H5eeOHEK4sM2Uka2-C2K8mjAlFlO/view?usp=sharing>

[https://drive.google.com/file/d/1qp5btley\\_BCK5h8HbfgsgPoCnZNNhAZmm/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1qp5btley_BCK5h8HbfgsgPoCnZNNhAZmm/view?usp=sharing)

[https://drive.google.com/file/d/1I5cilKnbpFHDYza0FzCWbK0n\\_KBX-cC9/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1I5cilKnbpFHDYza0FzCWbK0n_KBX-cC9/view?usp=sharing)

I programmi producono tutti i numeri modulo 3 sino a  $2^l-1$  e "filtrano" le configurazioni possibili:

- le cifre "1" indicano i vertici dell'aiuola di fiori sui punti medi dei lati del poligono
- le cifre "2" indicano i vertici dell'aiuola di fiori sui vertici dei lati del poligono
- gli "0" sono da eliminare con l'accortezza, però, di non perdere qualche configurazione
- per esempio, un "2" iniziale potrebbe riferirsi al primo vertice oppure al secondo
- in questo caso va mantenuto lo "0" iniziale se presente per non perdere la configurazione
- poi si controlla la somma delle cifre, e si mantengono solo i valori con somma uguale a l
- si verifica quindi che non vi siano due "2" accostati, nel qual caso si scarta il valore
- la verifica del "2" accostati è "circolare": si confronta anche la prima con l'ultima cifra
- infine, si perdono i valori duplicati, quelli che restano sono tutte le configurazioni possibili.

Chiaramente questa non era una dimostrazione, ma solo un'ipotesi corroborata dai valori ottenuti. Quindi ho tentato di individuare una dimostrazione che la confermasse per fornire la mia soluzione:

- noto che le configurazioni per un poligono di l lati sono la somma di quelle per l-1 e l-3 lati
  - ho perciò "disegnato" con GeoGebra un ettagono con inscritti sia un esagono che un trapezio
- (mi è parso il minino per non trovarmi ad analizzare una situazione banale non generalizzabile):

Restano da costruire tutte le configurazioni possibili dell'ettagono che passano per il vertice  $V_1$ .

Data l'interpretazione dei vincoli, significa che le restanti devono passare per i punti  $M_2$  e  $M_6$ . Se sono tutte quelle del poligono con 1-3 lati sotto il lato  $V_6-V_3$  ho completato la dimostrazione. Sino all'ottagono alcune configurazioni non sono presenti ma, mi pare, non infici la dimostrazione.

Devo quindi trovare una corrispondenza biunivoca fra le restanti e quelle del poligono di 1-3 lati.

Oltre l'ettagono, nei poligoni regolari con più lati,  $M_4$  si sdoppia in:  $M_4$  destro  $M_{4d}$  e sinistro  $M_{4s}$

(non ho proposto un poligono regolare con un numero maggiore di lati perché, per ora, complicava).

Per la corrispondenza biunivoca uso pure i vertici destro e sinistro successivi che chiamo:  $V_d$  e  $V_s$ .

Come detto, le configurazioni del poligono con 1-3 lati passano per uno solo dei punti:  $V_6$   $M_1$  e  $V_3$ .

Elenco come poter integrare, con i lati mancanti, tutte le configurazioni del poligono con 1-3 lati

(mi servo come schema per individuarle, delle configurazioni possibile nel quadrilatero

$V_3-V_4-V_5-V_6$ ):

quadrilatero      configurazioni lato sinistro e destro del poligono regolare

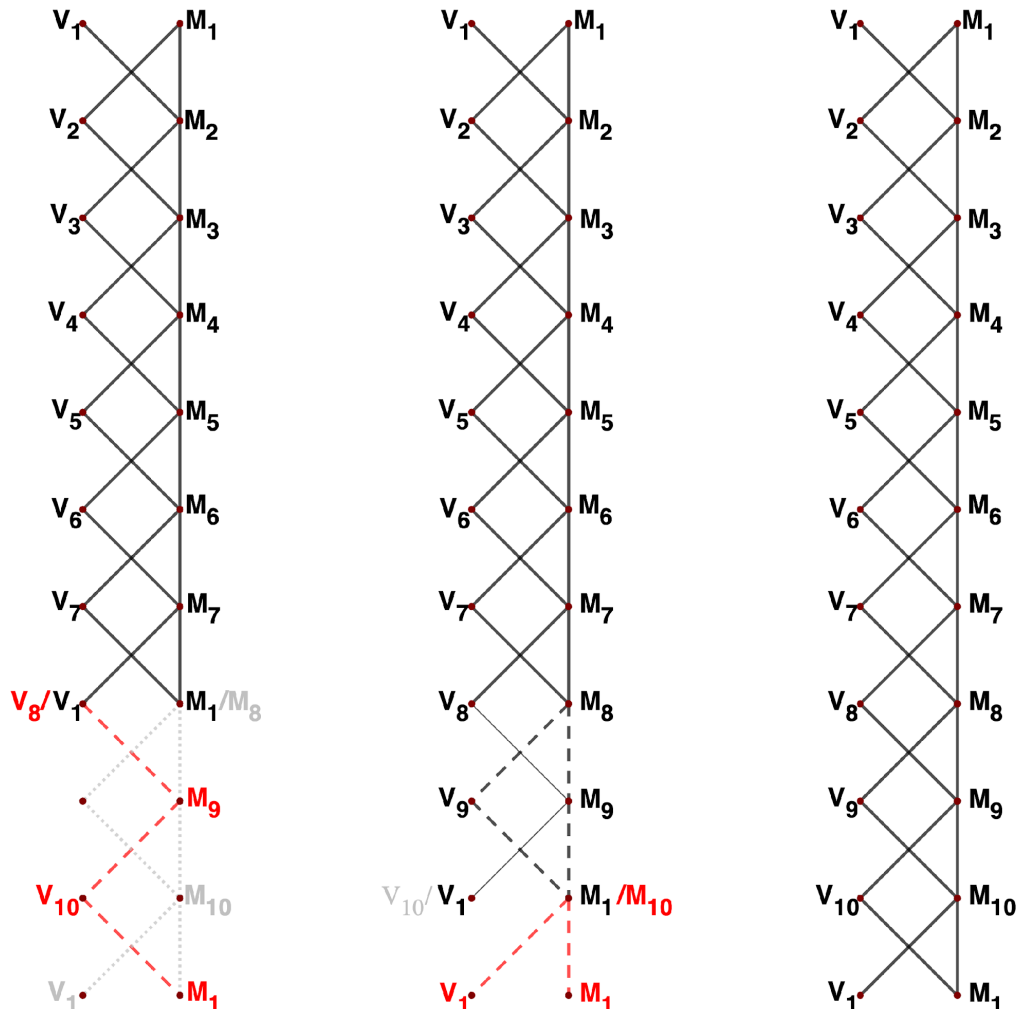
- $M_5-M_t-M_3-M_4$  → lato sinistro:  $M_6-M_5-M_{4s}-...$  , lato destro:  $M_2-M_3-M_{4d}-...$  (sono presenti solo "M")
- $V_6-M_3-M_4$  → lato sinistro:  $M_6-M_5-V_s-...$  , lato destro:  $M_2-M_3-M_{4d}-...$  (a sinistra c'è un "V")
- $M_4-M_5-V_3$  → lato sinistro:  $M_6-M_5-M_{4s}-...$  , lato destro:  $M_2-M_3-V_d-...$  (a destra c'è un "V")
- $V_5-M_t-M_3$  → lato sinistro:  $M_6-V_s-...$  , lato destro:  $M_2-M_3-M_{4d}-...$  ("V" destro nel quadrilatero)
- $V_4-M_t-M_5$  → lato sinistro:  $M_6-M_5-M_{4s}-...$  , lato destro:  $M_2-V_d-...$  ("V" sinistro nel quadrilatero)

quadrilatero)

(partono tutte dal lato sinistro con  $M_6$  e destro con  $M_2$ , e sono quelle possibili senza doppiioni).

Unendo, quindi, i punti  $M_6$  e  $M_2$  con  $V_1$  si completano le singole configurazioni mancanti del poligono.

Propongo tre grafi che, forse, possono servire a motivare, almeno intuitivamente, quanto ho esposto:



Nel grafo di sinistra mostro tutti i cammini possibili nel caso di un poligono regolare con 7 lati:

- i vertici rappresentano i "punti notevoli" del poligono: punti medi e vertici
- gli archi sono i lati, permessi dai vincoli del problema, del poligono interno
- gli archi neri continui sono tutti quelli che appartengono ai poligoni interni
- i poligoni interni sono tutti i cammini possibili da ogni vertice a sé stesso (i cammini sono in senso circolare; ho riproposto, perciò, i vertici iniziali)
- ho aggiunto il cammino tratteggiato rosso che appartiene al poligono di 10 lati

- con tale aggiunta il numero totale dei cammini circolari dai vertici non varia
- gli archi in grigio tratteggiati sono quelli restanti in un poligono di 10 lati

Il grafo centrale mostra tutti i cammini, permessi dai vincoli, in un poligono regolare di 9 lati:

- vale quanto detto sopra; ho, in più, tratteggiato in nero gli archi che mancavano
- anche qui il numero di cammini non varia perché se ne aggiunge e se ne perde uno (per  $M_{10}$  partono quelli per  $V_1$  e  $M_1$ , quelli per  $V_8-M_9-V_{10}$  sono nel grafo di sinistra)
- si nota che tutti gli archi e cammini sono presenti come mostra il grafo a destra.

Mostro, per concludere, la ricorrenza utilizzando i valori modulo 3 ottenuto dai programmi allegati

(tali valori rappresentano tutte le possibili configurazioni previste per un poligono di lato  $n$ ):

- per evitare casi degeneri, mi riferisco a poligono regolari con, almeno, otto lati
- i valori che i programmi producono sono, in tutto, di quattro tipologie differenti:
  - quelli che iniziano per "02" e terminano con "1"
  - quelli che iniziano con "1" e terminano con "1"
  - quelli che iniziano con "1" e terminano con "2"
  - quelli che iniziano con "2" e terminano con "1"
- dai valori ottenuti per il poligono con  $n - 1$  lati aggiungo "1" dopo l'ultima cifra
- con le configurazioni del poligono con  $n - 1$  lati ottengo parte di quelle per  $n$  lati (le configurazioni così ricavate sono tutte differenti e ammesse per tale poligono)
- per completare le configurazioni di un poligono regolare con  $n$  lati mancano ora solo:
  - quelle che iniziano per "02" e terminano con "21"
  - quelle che iniziano per "1" e terminano con "12"
  - quelle che iniziano per "2" e terminano con "21"
- tali configurazioni le ricavo servendomi di quelle del poligono regolare di  $n - 3$  lati
  - da quelle che iniziano per "02" e terminano con "1" aggiungo "121"
  - da quelle che iniziano per "1" e terminano con "1" aggiungo "212"
  - da quelle che iniziano per "1" e terminano con "2" aggiungo "112"
  - da quelle che iniziano per "2" e terminano con "1" aggiungo "121"
- in questo modo ho ottenuto, da tutte le configurazioni con  $n - 3$  lati, quelle restanti.