

Câu 49: [2H2-2.6-3] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi I là điểm đối xứng với O qua A . Lấy điểm S sao cho $SI \perp (P)$ và $SI = 2a$. Tính bán kính R mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S .

- A. $R = \frac{a\sqrt{65}}{4}$. B. $R = \frac{a\sqrt{65}}{16}$. C. $R = \frac{a\sqrt{65}}{2}$. D. $R = \frac{7a}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Nhận xét: $\begin{cases} SI \subset (SAB) \\ SI \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (P)$.

Mặt khác: (SAB) chứa đường kính của đường tròn tâm O nên (SAB) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn đi qua ba điểm S, A, B .

Do đó tâm của mặt cầu cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB .

Cách 1: Trong mặt phẳng (SAB) , chọn hệ trục Oxy sao cho $I(0; 0)$; $A(a; 0)$; $B(3a; 0)$; $S(0; 2a)$.

Ta có tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} AE = BE \\ AE = SE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = (x-3a)^2 + y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-2a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow H\left(2a; \frac{7a}{4}\right)$$

$$R = AE = \frac{a\sqrt{65}}{4}$$

$$\sqrt{SI^2 + IA^2} = a\sqrt{5}, \quad SB = \sqrt{SI^2 + IB^2} = a\sqrt{13}$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SI \cdot AB = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4R} \Rightarrow R = \frac{SA \cdot SB}{2SI} = \frac{a\sqrt{5}a\sqrt{13}}{2 \cdot 2a} = \frac{a\sqrt{65}}{4}$$

Cách 3: Gọi mặt cầu tâm H qua đường tròn tâm O và điểm S . Khi đó ta có tứ giác $HOIS$ là hình thang vuông tại O và I .

Ta có $SI = OI = 2a = 2OA$. Gọi $R = HA = HS = HB$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

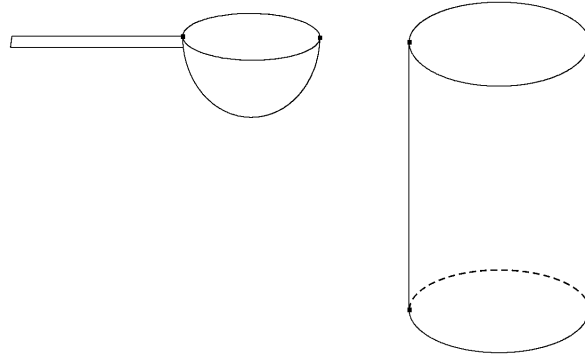
Kẻ $HK \perp SI$ ($K \in SI$), đặt $HO = x = KI$ ($x > 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} HA = \sqrt{HO^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \\ HS = \sqrt{HK^2 + SK^2} = \sqrt{(2a-x)^2 + 4a^2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } HA = HS \text{ nên } \sqrt{(2a-x)^2 + 4a^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{7a}{4}$$

$$\text{Vậy } R = HA = \sqrt{\left(\frac{7a}{4}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{65}}{4}$$

Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 2 năm 2017-2018) Một người dùng một cái ca hình bán cầu (Một nửa hình cầu) có bán kính là $3(\text{cm})$ để mức nước đổ vào một cái thùng hình trụ chiều cao $10(\text{cm})$ và bán kính đáy bằng $6(\text{cm})$. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng? (Biết mỗi lần đổ, nước trong ca luôn đầy)



A. 10 lần.

B. 24 lần.

C. 12 lần.

D. 20 lần.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích nước cần mức bằng thể tích của trụ: $V = \pi R^2 h = \pi 6^2 10 = 360\pi (\text{cm}^3)$.

Thể tích của mỗi ca nước bằng một nửa thể tích khối cầu bán kính $3(\text{cm})$, nên thể tích nước

mỗi lần mức là $V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi (\text{cm}^3)$.

Suy ra số lần cần mức để đổ đầy thùng nước là: $\frac{360\pi}{18\pi} = 20$ (lần).

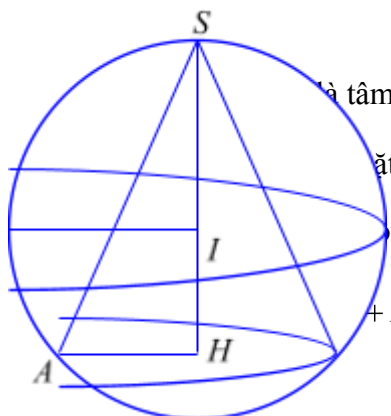
Câu 47. [2H2-2.6-3] (THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là:

A. $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.C. $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.D. $R = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi các điểm như hình vẽ bên.



là tâm đường tròn đáy (C) suy ra $SH \perp (C)$, và $HA = 1$.

ặt cầu ngoại tiếp hình nón (N) .

ng IHA ta có $IH = \sqrt{R^2 - 1}$.

$$+ IH = R + \sqrt{R^2 - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} - R > 0 \\ R^2 - 1 = R^2 - 2\sqrt{3}R + 3 \end{cases} \Leftrightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 29. [2H2-2.6-3] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Cần phải thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đáy để đựng nước sạch có dung tích $V(\text{cm}^3)$. Hỏi bán kính $R(\text{cm})$ của đáy hình trụ nhận giá trị nào sau đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

B. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

C. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$

D. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Lời giải

Chọn D.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của thùng phải ít nhất.

Ta có $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$
 $= \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$

Vậy $(S_{tp})_{\min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ khi $\frac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Câu 41. [2H2-2.6-3] (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Xét hình trụ (T) nội tiếp một mặt cầu bán kính R và S là diện tích thiết diện qua trục của (T) . Tính diện tích xung quanh của hình trụ (T) biết S đạt giá trị lớn nhất

A. $S_{xq} = \frac{2\pi R^2}{3}$

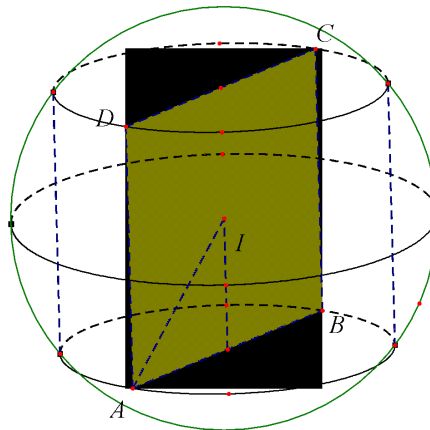
B. $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{3}$

C. $S_{xq} = 2\pi R^2$

D. $S_{xq} = \pi R^2$

Lời giải

Chọn C.



Gọi x là bán kính của hình trụ $0 < x < R$. Diện tích thiết diện là

$S = 2x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$

Vì $4x\sqrt{R^2 - x^2} \leq 2 \cdot (x^2 + R^2 - x^2)$ nên $S \leq 2R$. Vậy $S_{\max} = 2R$ khi $x = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = 2\pi R^2$

Câu 39. [2H2-2.6-3] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $BC = 2a$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm O sao cho $OA = x$. Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với AD . Tìm x biết thể tích của hình tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh d gấp ba lần thể tích hình cầu có bán kính bằng cạnh AB .

A. $x = \frac{a}{2}$.

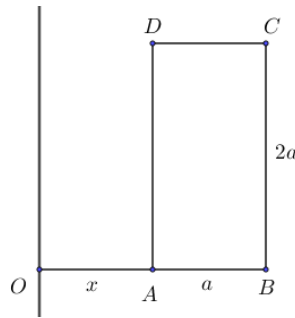
B. $x = 2a$.

C. $x = a$.

D. $x = \frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



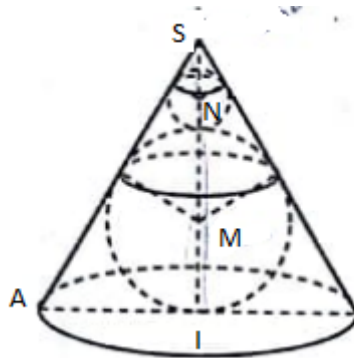
Thể tích khối cầu có bán kính $R = AB = a$: $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Thể tích khối trụ tròn xoay sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh d .

$$V_2 = \pi(x+a)^2 2a - \pi x^2 2a$$

Theo đề ta có $V_2 = 3V_1 \Leftrightarrow \pi(x+a)^2 2a - \pi x^2 2a = 4\pi a^3 \Leftrightarrow (x+a)^2 - x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Câu 46. [2H2-2.6-3] (Sở GD & ĐT Cần Thơ - Mã đề 302 - Năm 2017 - 2018) Người ta chế tạo một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên chế tạo ra hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với mặt đáy của hình nón (hình vẽ). Biết rằng chiều cao của hình nón bằng 9cm. Bỏ qua bề dày các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng



A. $\frac{112\pi}{3}$.

B. $\frac{40\pi}{3}$.

C. $\frac{38\pi}{3}$.

D. $\frac{100\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo một đường tròn (C) . Khi đó đường kính của đường tròn (C) bằng $R\sqrt{3}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\frac{R}{2}$.

Mặt phẳng (P) cách tâm I một khoảng $\frac{R}{2}$ chia khối cầu thành hai phần, phần lớn là phần chứa tâm I còn phần nhỏ là phần không chứa tâm I gọi là chỏm cầu. Khi đó

$$V = \left(2R + \frac{R}{2}\right) \left(R - \frac{R}{2}\right)^2 \frac{\pi}{3} = \frac{5R}{2} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi R^3}{24}$$

thể tích của chỏm cầu là

Cách 2: Thể tích khối chỏm cầu là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau: đồ thị $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = \frac{R}{2}$; $x = R$ quay quanh trục hoành.

$$V = \pi \int_{\frac{R}{2}}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{24}$$

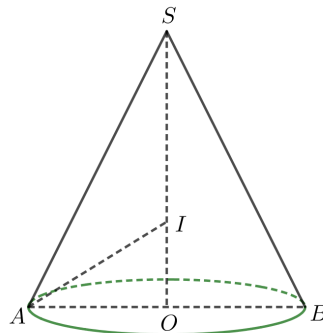
Thể tích này là:

Câu 36: [2H2-2.6-3] (CHUYÊN HÀ LONG- LẦN 3-2018) Cho hình nón có bán kính đáy bằng 6, chiều cao bằng 8. Biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón, đồng thời tiếp xúc với mặt đáy của hình nón. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A. 5. B. 1,75. C. 4,25. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Đường phân giác của góc $\angle SOA$ cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu cần tìm, bán kính $r = IO$.

Ta có: $SO = 8$, $OA = 6 \Rightarrow SA = 10$.

$$\frac{SI}{IO} = \frac{SA}{OA} \Leftrightarrow \frac{SO - IO}{IO} = \frac{SA}{OA} \Leftrightarrow \frac{8 - r}{r} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow r = 3.$$

Câu 42. [2H2-2.6-3] (CHUYÊN HÀ TĨNH -LẦN 1-2018) Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

- A. $P = 6$. B. $P = 0$. C. $P = 3$. D. $P = 9$.

Lời giải

Chọn D.

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên

$$d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy)) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases} \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.