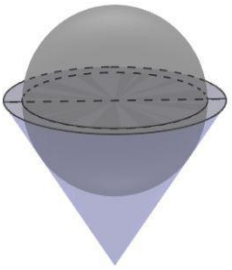
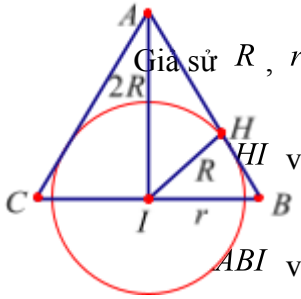
Câu 46. **[2H2-2.5-4] (THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018)** Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu không thấm nước, có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là V. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Tính thể tích nước còn lại trong bình.



A. $\frac{1}{6}V$. **B.** $\frac{1}{3}V$. **C.** V. **D.** $\frac{1}{\pi}V$.

Lời giải

Chọn B.



Giả sử R, r lần lượt là bán kính mặt cầu, bán kính mặt nón.

HI vuông tại H ta có: $\sin \widehat{HAI} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAI} = 30°$

ABI vuông tại I ta có: $\tan 30° = \frac{r}{2R} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

Thể tích nước tràn ra ngoài là $V = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3}$

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2.2R = \frac{8\pi R^3}{9}$

Thể tích nước còn lại là $V_2 = \frac{8\pi R^3}{9} - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{9} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}V$.

Câu 45: **[2H2-2.5-4] (THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, (S) là mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên (S). Tính tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

A. $\frac{3a^2}{8}$. **B.** a^2. **C.** $4a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi I là tâm mặt cầu (S), theo giả thiết thì I là tâm của tứ diện đều $ABCD$.Gọi O là tâm tam giác BCD thì $AI = \frac{3}{4}AO = \frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$; $R = \sqrt{AI^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$

$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$$

$$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)+4IA^2$$

$$=4\left(R^2+IA^2\right)$$

$$=2a^2.$$

Câu 49. **[2H2-2.5-4]** **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{7}{15}$. **D.** $\frac{6}{11}$.

Lời giải

Chọn D.

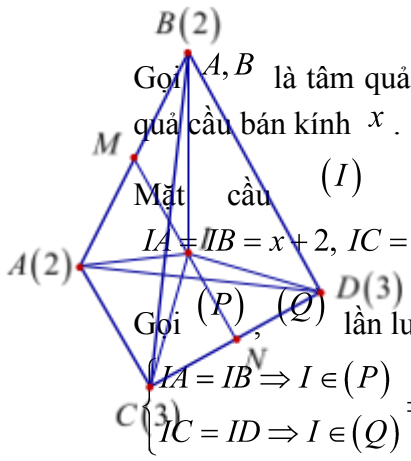
Cách 1:

Gọi A,B,C,D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB=4$, $AC=BD=AD=BC=5$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Dễ dàng tính được $MN=2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA=IB, IC=ID$ nên I nằm trên đoạn MN.

Đặt $IN=x$, ta có $IC=\sqrt{3^2+x^2}=3+r$, $IA=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}-x\right)^2}=2+r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2+x^2}-\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}-x\right)^2}=1\Leftrightarrow x=\frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r=\sqrt{3^2+\left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2}-3=\frac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A,B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C,D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x.

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A,B,C,D nên $IA=IB=x+2,\ IC=ID=x+3$.

Gọi (P), (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD.

$$\begin{cases} IA=IB\Rightarrow I\in(P) \\ IC=ID\Rightarrow I\in(Q) \end{cases}\Rightarrow I\in(P)\cap(Q)\ (1).$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=CA=CB=5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD, suy ra $MN=(P)\cap(Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I\in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$.

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$.

Tam giác ABN có $NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}$.

Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$.