



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

PHYSIQUE

DURÉE: 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Les deux problèmes sont indépendants.

La partie D du premier problème est indépendante des parties A, B et C.

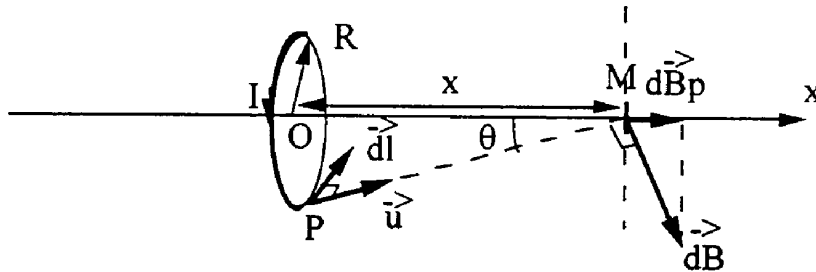
*Les parties A, B, et C du premier problème sont indépendantes,
si l'on admet le résultat de la partie A donné dans l'énoncé.*

Les parties A et B du second problème sont indépendantes.

PREMIER PROBLEME: CALCULS DE CHAMPS MAGNETIQUES

PARTIE A: Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire, en un point quelconque de son axe.

Le but de la partie A est de calculer le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant électrique d'intensité I , en un point M quelconque de son axe, repéré par



l'abscisse x ou l'angle θ sous lequel est vu le point M de la spire (cf figure n°1).

Figure n° 1: Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point quelconque de son axe

On rappelle la formule de Biot et Savart dans le cas d'un circuit filiforme, donnant l'expression de la contribution élémentaire $d\vec{B}$ au champ au point M , créée par l'élément de circuit $d\vec{l}$ autour du point P (cf figure n° 1):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

où : $r = PM$ et

1. Justifier l'orientation du vecteur $\vec{dB}$ sur la figure n°1. Quel est l'angle formé par ce vecteur et l'axe Ox ?
2. Par des considérations de symétrie, donner la direction du champ total $\vec{B}$.
3. Evaluer la contribution de l'élément $\vec{dB}$ au champ magnétique total $\vec{B}$, c'est-à-dire $\vec{dB}_p$ la projection de $\vec{dB}$ sur l'axe Ox.
4. Par intégration sur la spire en sa totalité, calculer le champ magnétique total. On donnera l'expression du champ en fonction:
 - de la variable angulaire θ
 - puis de l'abscisse x.

Montrer qu'en fonction de l'abscisse x, l'expression du champ magnétique B est:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Note: Ce résultat peut être admis pour les Parties B et C.

PARTIE B: Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire, en un point proche de son axe, mais pas sur l'axe.

On considère la spire de la partie A précédente (figure n° 1). Le but de la partie B est de calculer le champ au point M', à l'abscisse x (comme M), mais à une distance r de l'axe (r est faible par rapport à R, mais $r \neq 0$). La symétrie de la partie A étant « rompue », il apparaît en M' une composante radiale $\vec{B}_r(x, r)$ du champ $\vec{B}$ (cf figure n°2). Pour la calculer, nous allons utiliser la propriété « fondamentale » du champ magnétique « **d'être à flux conservatif** ».

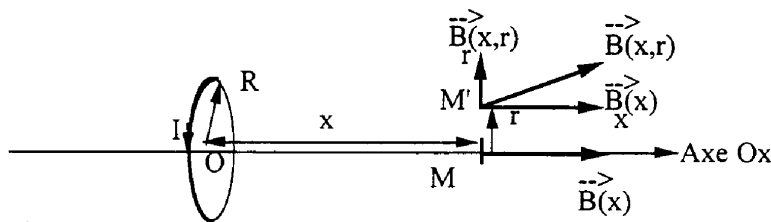


Figure n°2: Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de l'axe

1. Traduire la propriété: « le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif ». Montrer qu'elle est l'expression intégrale de l'équation de Maxwell: $\text{div } \vec{B} = 0$.

Dans le cas où r est faible par rapport à R, et en première approximation, on considère que la composante selon l'axe Ox du champ en M' est égale à la composante selon ce même axe du champ en M (situé sur l'axe), soit $\vec{B}_x(x, r) = \vec{B}_x(x)$. Cette composante, uniquement fonction de x, s'écrira donc: $\vec{B}_x(x)$.

2. Le but de cette question est de calculer le flux du champ à travers la surface (S) fermée constituée de la surface latérale du cylindre de rayon r comprise entre les tranches d'abscisse x et $x+dx$, ainsi que des deux surfaces terminales en x et $x+dx$ (cf figure n° 3). Pour cela,

a) Quel est le sens de la normale, permettant de calculer le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée. On appliquera ce sens pour la résolution des questions suivantes.

b) Calculer le produit scalaire $\vec{B}(x,r) \cdot \vec{n}$ sur la surface latérale du cylindre, avec $\vec{n}$ normale à la surface.

c) Calculer ce produit scalaire sur la surface terminale en x .

d) Calculer ce produit scalaire sur la surface terminale en $x + dx$.

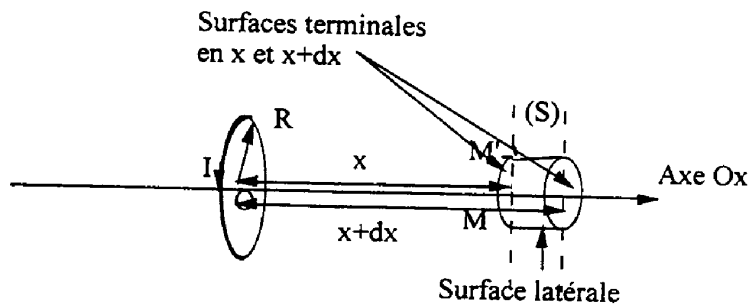


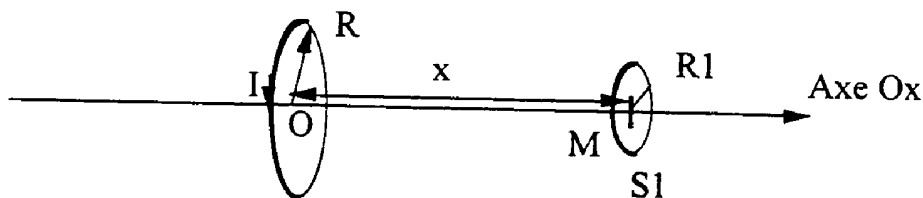
Figure n°3: Surface pour le calcul du flux du champ magnétique

e) En déduire l'expression du flux du champ magnétique à travers la surface fermée (S).

3. En déduire la composante radiale du champ en M' , $B_r(x,r)$ en fonction de r ainsi que de la dérivée première de la composante selon l'axe Ox du champ $B_x(x)$.

4. Calculer l'expression de $B_r(x,r)$ en fonction de r et x .

5. Soit une spire S_1 , circulaire, de rayon R_1 « petit » devant R , placée perpendiculairement à l'axe dans le champ magnétique créé par la spire S précédente (cf figure n° 4). Calculez le flux



(approché) Φ_1 du champ magnétique à travers S_1 . En déduire le coefficient de mutuelle $M(x)$.

Figure n° 4: Mutuelle entre deux spires

PARTIE C: Calcul du champ magnétique créé par un solénoïde, en un point de son axe.

Soit un solénoïde circulaire (cf figure n° 5), de rayon R , d'axe MX , comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant électrique d'intensité I . Le but de cette partie est de calculer le champ magnétique en un point M quelconque, situé sur son axe. Pour ce faire, on décompose le solénoïde en une infinité de bobines « plates » élémentaires parcourues par le courant I , dont le champ magnétique va être déduit de la partie A.

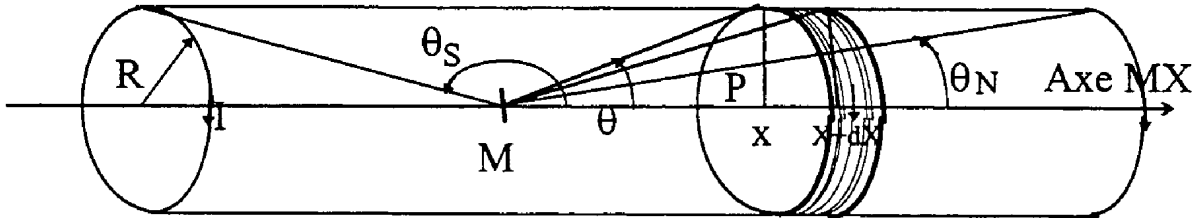


Figure n°5: Champ créé par un solénoïde en un point de son axe

Ainsi, on considère pour la partie C, un nouveau repère MX , dans lequel le point M est l'origine et la position de la bobine « plate » élémentaire, au point P repérée par l'abscisse X . Cette bobine, d'épaisseur dX , comportant $n dX$ spires, est située entre les abscisses X et $X + dX$ (cf figure n° 6)

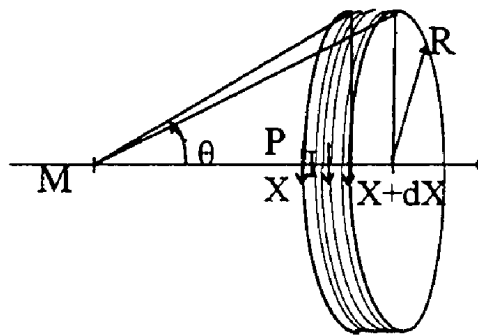


Figure n°6: Bobine plate élémentaire

1. Quelle est la relation entre x , l'abscisse du point M , par rapport à O dans l'ancien repère (cf figure n°1: $x = \overline{OM}$) et X l'abscisse du point P , par rapport à M , dans le nouveau repère (cf figure n°7: $X = \overline{MP}$) quand P varie, M restant fixe. A partir des résultats de la Partie A, déterminer la relation entre $B(x)$ et $B(X)$, pour une spire circulaire.

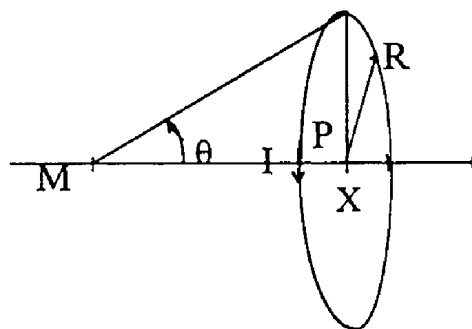


Figure n°7: Nouveau repère

2. Déduire de la question précédente, le champ élémentaire $d\vec{B}$ créé par la bobine élémentaire de largeur dX située en X , comportant $n dX$ spires, parcourue par un courant d'intensité I (cf figure n  6), en fonction de I , n , R , X et dX . Quelle est sa direction ? En déduire la direction du champ $\vec{B}$ total.

3. Quelle est la relation entre X et θ , puis entre dX et $d\theta$?

4. Exprimer $d\vec{B}$ en fonction de la variable angulaire θ .

5. Calculer $B = \|\vec{B}\|$, en int grat le résultat pr c dent de l'angle θ_s   θ_N (cf figure n 5).

6. En déduire le champ magnétique à l'intérieur d'un sol no ide infini. Dépend t-il du rayon R du sol no ide ?

PARTIE D: Calcul du champ magnétique créé par un sol no ide infini, par le Théorème d'Ampère.

Soit un sol no ide infini, d'axe Ox , dont la coupe est présentée figure 8, comportant n spires par unité de longueur parcourue par un courant I . On suppose que l'on peut assimiler ces n spires parcourues par le courant I , à un courant de densité volumique $\vec{j}$ uniforme, circulant entre R_1 et R_2 .

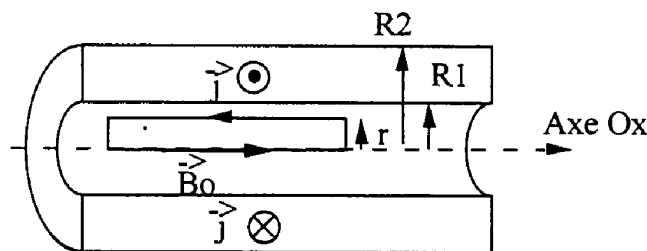


Figure n 8: Coupe du sol no ide infini

1. Rappeler le Théorème d'Ampère, qui relie la circulation du champ magnétique sur un contour fermé au courant traversant ce contour.

2. Supposons, pour cette question, connu le champ sur l'axe Ox , d'intensité B_0 . En déduire, par le Théorème d'Ampère, et en justifiant au préalable l'utilisation du contour ci-dessus (cf figure n 8), l'expression du champ B , en fonction de B_0 et des autres données du problème pour:

- $r < R_1$
- $R_1 < r < R_2$
- $r > R_2$.

3. Par un raisonnement physique, concernant la valeur du champ à une distance infinie de l'axe, en déduire la valeur de B_0 en fonction des données du problème. Reprendre les formules du champ magnétique obtenues lors de la question précédente, et les exprimer en fonction des données du problème.

4. D'après la relation entre j et I , en déduire la valeur du champ B_0 , à l'intérieur du sol no ide infini en fonction de n et I . Vérifier que l'on retrouve le résultat de la partie précédente.

SECOND PROBLEME: PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES

On rappelle la forme des équations de Maxwell en présence de charges et de courants:

1) Maxwell - Gauss: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

3) Maxwell - Faraday: $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2) Maxwell - « flux »: $\text{div} \vec{B} = 0$

4) Maxwell - Ampère: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

ainsi que la formule du « double rotationnel »: $\text{rot}(\text{rot} \vec{C}) = \text{grad}(\text{div} \vec{C}) - \Delta \vec{C}$ où $\vec{C}$ est un vecteur, et $\Delta \vec{C}$ son Laplacien,

et l'expression du d'Alembertien: $\square \vec{C} = \Delta \vec{C} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial t^2}$

PARTIE A: Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide.

1. A partir des équations de Maxwell dans le vide, établir les équations de propagation, c'est-à-dire le d'Alembertien des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

2. Montrer qu'une fonction de la forme: $f(z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$ est solution de l'équation de propagation, c'est-à-dire que son d'Alembertien unidimensionnel vérifie:

$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ avec c célérité de la lumière dans le vide vérifiant $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3. Soit un champ électrique $\vec{E}$ de la forme: dans un repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Montrer que les surfaces équiphasés, pour t fixé, sont des plans.

b) Montrer que $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation: $\square \vec{E} = 0$.

4. A partir des équations de Maxwell, déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé. Pour ce faire, on ne s'intéressera qu'à la partie variable dans le temps des champs, c'est-à-dire que les constantes d'intégration seront prises nulles.

5. En déduire la structure de l'onde plane:

a) Quelle est la nature du trièdre ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{K}$), où $\vec{K}$ est le vecteur d'onde, dont on précisera la direction.

b) Quel est le rapport des normes des champs: $\frac{E}{B}$?

PARTIE B: Réflexion d'une onde électromagnétique par un plan métallique.

L'onde incidente ($\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{K}_i$) tombe normalement sur un plan métallique, considéré comme

$$\vec{E}_i = \begin{cases} E_{0i} \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

un conducteur parfait, situé dans le plan $z = 0$ (cf. figure n° 9).

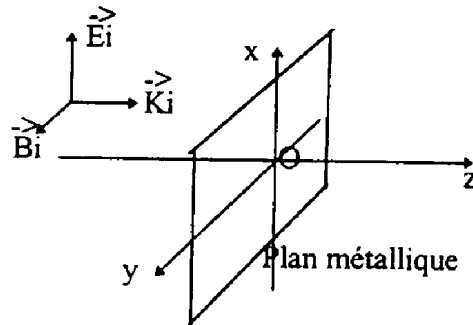


Figure n° 9: Onde électromagnétique tombant normalement sur un plan métallique

1. Conditions aux limites:

a) Rappeler, sans les démontrer, les conditions que doivent satisfaire les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans le vide, à la limite du conducteur métallique, supposé « parfait ». On précisera bien les composantes normales et tangentielles des champs, par rapport à la surface du plan métallique.

b) Traduire ces conditions par des relations sur les axes (Ox, Oy, Oz) de la figure n° 9.

2. Onde réfléchi:

a) Le champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente vérifie-t-il les conditions aux limites à la surface du plan conducteur ? Montrer l'existence d'un champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$ pour les satisfaire.

$$\vec{E}_r = \begin{cases} E_{0r} \cos(\omega'(t + \frac{z}{c})) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

b) On admet l'expression suivante du champ réfléchi:

Préciser la relation entre la pulsation de l'onde réfléchi ω' et la pulsation de l'onde incidente ω , et justifier

l'expression en $(t + \frac{z}{c})$. Enfin, donner la valeur de E_{0r} en fonction de E_{0i} .

c) En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi associé $\vec{B}_r$. Retrouve-t-on bien la structure de l'onde plane pour l'onde réfléchie ?

3. Superposition des ondes incidente et réfléchie:

a) Donner l'expression du champ électrique total: $\vec{E}(t, z) = \vec{E}_i(t, z) + \vec{E}_r(t, z)$. Ce champ se propage-t-il toujours ? Quel est le phénomène observé ?

b) Même question pour le champ magnétique total: $\vec{B}(t, z) = \vec{B}_i(t, z) + \vec{B}_r(t, z)$.

c) Montrer qu'il existe une série de points pour laquelle quelque soit l'instant t : $\vec{E}(t, z) = 0$ et une autre pour laquelle $\vec{B}(t, z) = 0$. Donner les abscisses z correspondantes.

d) On se placera à l'instant t_0 tel que $\omega t_0 = \frac{\pi}{4}$. Esquisser l'allure de $E(z, t_0)$ et de $B(z, t_0)$.

4. Développement de courants surfaciques:

a) Montrer qu'il se développe des courants surfaciques de densité $\vec{j}_s$ à la surface du plan métallique. Calculer $\vec{j}_s$. Quelle est la direction de ces courants ?

Soit une grille métallique, constituée de fils métalliques parallèles (cf figure n° 10). On suppose que les courants ne peuvent se déplacer que dans la direction des fils.

b) On oriente la direction des fils selon Ox (cf figure n°10). Expliquer le phénomène.

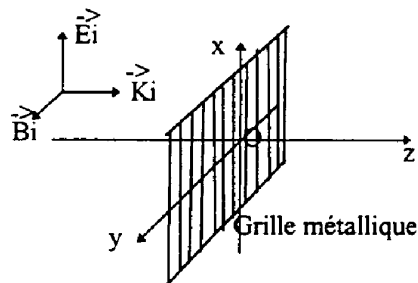


Figure n° 10: Onde électromagnétique tombant normalement sur une grille métallique

c) Même question si l'on oriente la direction des fils selon Oy.

d) Proposer une utilisation d'une telle grille.

Fin de l'énoncé