

Тема: Перестановки. Розміщення. Комбінації. Основні поняття теорії ймовірностей

Посилання на підручник:
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Перестановки. Розміщення. Комбінації

1. Поняття факторіалу.

Означення. Факторіалом числа n , де n — ціле невід'ємне число називають добуток всіх натуральних чисел від 1 до n .

Позначають це так $n!$. Отже, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$. За означенням приймають $0! = 1$.

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Приклад 5. Спростити вираз $6!/5!$.

Розв'язання.

Маємо

2. Розміщення.

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Означення. Розміщенням з n елементів по k ($k < n$) називають будь-яку впорядковану підмножину U множини X , причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.

Для позначення цього числа застосовується спеціальний символ A_n^k (читається: «число розміщень із n по k » або « A із n по k ». A – перша буква

французького слова «arrangement», що означає «розміщення, приведення у порядок».

Використовуючи позначення факторіала, формулу записують у вигляді:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Приклад 6. Нехай дано множину $X = \{1;2;3\}$. Тоді по одному можна скласти такі розміщення: [слайд 8]

(1), (2), (3) - їх буде 3;

по два можна скласти такі розміщення:

(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - їх буде 6;

по три можна скласти такі розміщення:

(1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1) - їх буде 6.

Кількість розміщень можна записати $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

Приклад 7. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів при виборі з 9 предметів, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв'язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 60480$$

Приклад 8. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв'язання. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти A_8^2 штук, але лише половина з них правильні. Отже, шукана кількість дробів $\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8!}{6!} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$

3. Перестановки.

Означення. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з заданих n -елементів, називається **перестановкою із n -елементів**.

Число перестановок із n -елементів позначають через P_n . P – перша буква французького слова «permutation» -- «перестановки».

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n . З означення випливає, що $P_n = A_n^k$. Тоді враховуючи формулу для A_n^k та $0! = 1$, маємо:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Отже, $P_n = n!$

Приклад 9. Скількома способами можна розставити на полиці 6 книжок?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 6 елементів (книг): $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Приклад 10. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв'язання. З чотирьох цифр 0; 1; 2; 3 можна утворити P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0 не будуть записами чотирицифрових чисел, таких перестановок — P_3 . Отже, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!(4 - 1) = 6 \cdot 3 = 18$.

4. Комбінації (сполучення).

Нехай дано множину X з елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Означення. Комбінацією (сполученням) з n елементів по k ($k \leq n$) називають будь-яку підмножину Y множини X ; причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Число всіх комбінацій з n -елементів по k -елементів позначається символом C_n^k (читається: «число комбінацій із n по k » або «це із n по k »)

C – перша буква французького слова «combinasion» «комбінація».

У загальному випадку число комбінацій із n -елементів визначається такою формулою: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$$\text{Наприклад, } C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Приклад 11. [слайд 11] У вазі 6 червоних і 4 білих троянди. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) три троянди; 2) дві червоні і одну білу троянду?

Розв'язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати три троянди з 10 можна C_{10}^3 способами.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ (способів)}$$

2) Дві червоні троянди можна вибрати C_6^2 способами, а одну білу – C_4^1 способами. Тому вибрати дві червоні і одну білу троянди можна способами. Маємо

$$C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{3! \cdot 4}{3!} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ (способів)}$$

Властивості комбінацій:

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$

$$2. C_m^{n+1} = C_m^n * \frac{m-n}{n+1}$$

$$3. C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$

$$4. C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m$$

Якщо в комбінаторній задачі необхідно вибрати k елементів з n , то важливим є питання – необхідно враховувати порядок слідування елементів чи ні. Від цього залежить яку формулу (комбінаторну схему) необхідно використовувати:

якщо порядок має значення, то використовуємо A_n^k , якщо ні — то C_n^k .

Пропонується наступна задача-схема. [слайд 11]

В класі 20 учнів. Скількома способами з цього класу можна вибрати...	
старосту й його заступника	двох чергових
Обов'язки різні! Порядок має значення. $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$	Обов'язки однакові! Порядок не має значення. $C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$

Приклади на закріплення матеріалу

Приклад 1. В сьомому класі вивчається 14 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на суботу, якщо у цей день тижня має бути 5 різних уроків?

Розв'язання: На перший урок можна розмістити один із 14 предметів, на другий один з решти 13 предметів; на третій – один з 12, які лишились і т. д., тобто шукана кількість способів – це кількість впорядкованих п'яти елементних підмножин даної множини і їх кількість становить $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240240$ (або A_{14}^5)

Приклад 2. Відомо, що вибрати старосту класу і його заступника можна 600 способами. Скільки учнів навчається в цьому класі?

Розв'язання: Нехай у цьому класі n учнів. Тоді, за умовою. $A_n^2 = 600$, тобто $n(n-1) = 600$, звідси $n^2 - n - 600 = 0$. Єдиний корінь цього рівняння, що задовольняє умову, $n = 25$. Отже, в класі 25 учнів.

Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття. Тоді були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку. До таких ігор належать ігри з кубиками, гра в «орлянку», деякі карточні ігри. Б. Паскаль і П. Ферма в листуванні з приводу задач, які виникли в зв'язку з азартними іграми, запровадили поняття ймовірності. Для розв'язання таких задач існуючий тоді математичний апарат виявився недостатнім, і було закладено основи нової науки. Нині теорія ймовірностей широко застосовується в фізиці і в біології, у техніці, в різних галузях народного господарства.

Первісним поняттям теорії ймовірності є поняття події.

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: *A*, *B*, *C*... Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (чи не відбувається) подія.

Наприклад, випробування — підкидання монети, події: *A* — «поява герба», *B* — «поява цифри»; випробування — підкидання кубика, події: *A* — «поява 1 очка», *B* — «поява 2 очок», *C* — «поява 3 очок», *D* — «поява 4 очок», *E* — «поява 5 очок», *G* — «поява 6 очок».



Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Наприклад: під час витягування навмання однієї карти з колоди ви взяли короля. Подія *A* — «взято короля» є випадковою.

Випадкові події можуть бути масовими та одиничними.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені (можна спостерігати) необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах в серії пострілів; поява бракованих деталей при серійному випуску; радіоактивний розпад атомів речовин і т. д.

Прикладом одиничної випадкової події є падіння Тунгуського метеорита.

Теорія ймовірностей вивчає лише масові випадкові величини.



Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Наприклад, подія A — «поява на одній із граней грального кубика натурального числа, меншого за 7» — є вірогідною.



Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, подія A — «поява на одній із граней грального кубика цифри 7».



Повною групою подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

Наприклад: у випробуванні — кидання грального кубика повну групу подій становлять події:

A_1 — «поява числа 1»;

A_2 — «поява числа 2»;

A_3 — «поява числа 3»;

A_4 — «поява числа 4»;

A_5 — «поява числа 5»;

A_6 — «поява числа 6»,

або події:

B_1 — «поява парного числа»;

B_2 — «поява непарного числа».



Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Наприклад, попадання і промах при одному пострілі — це дві несумісні події; поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одному киданні грального кубика — це шість несумісних подій.



Рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.



Якщо події:

- 1) утворюють повну групу подій;
- 2) є несумісними;
- 3) є рівноможливими, то такі події утворюють *простір елементарних подій*.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал: п. 13, 14.
2. Законспектувати основні поняття, формули.
3. Виконати письмово вправи: 13.1-13.6, 14.1-14.6.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=DcM1Sa9l-AA>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .