

Correction ENS physique 2010

I.A Système non excité, en interaction avec la surface.

I.A.1.a. A la limite : $mg = \frac{K}{e^2}$ soit :

$$e = \sqrt{\frac{K}{mg}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-28}}{8 \cdot 10^{-12} \times 9,8}} = 1,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

I.A.1.b. Dans cette étude, les distances mesurées par la pointe seront inférieures à cette limite.

I.A.1.c. L'ordre de grandeur du rayon d'un atome est : $r \approx 10^{-10} \text{ m}$. La pointe effectue donc une lecture de la surface à l'échelle atomique car à cette distance la force d'interaction avec la surface devient prédominante.

I.A.2.a. Le bilan de forces est réalisé sur la pointe. Le poids de la pointe est maintenant négligé. L'application de la seconde loi de Newton donne :

$$\vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_f + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projection sur l'axe Oz :

$$\frac{K}{(D-z)^2} - \gamma \dot{z} - k(z-l_0) = m\ddot{z}$$

$$\ddot{z} + \frac{\gamma}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_0 + \frac{K}{m(D-z)^2}$$

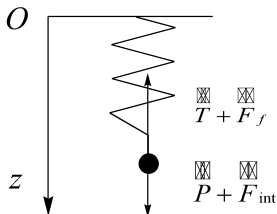
I.A.2.b. L'équation devient :

$$\begin{cases} 2\beta\omega_0 = \frac{\gamma}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \beta = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{km}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

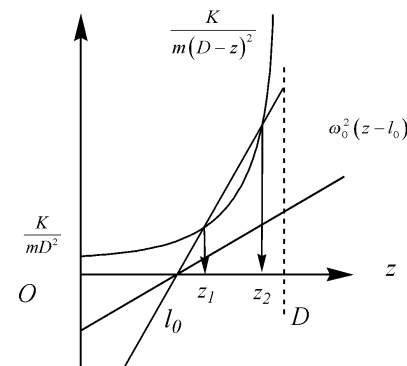
Par identification :

$$\omega_0^2(z-l_0) = \frac{K}{m(D-z)^2}$$

I.A.3.a. A l'équilibre :



I.A.3.b. La résolution graphique permet de retrouver les positions dites d'équilibre.



Les points d'intersection des deux courbes définissent les positions d'équilibre pour $0 \leq z \leq D$. Selon la valeur de ω_0 le système possède 0, 1 ou 2 positions d'équilibres.

I.A.3.c. Nous sommes dans le cas où ω_0 est assez grand pour que le système possède deux positions d'équilibre z_1 et z_2 ($0 \leq z_1 \leq z_2 \leq D$).

· Au voisinage de z_1 : $z = z_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) :

$$\omega_0^2(z-l_0) > \frac{K}{m(D-z)^2}$$

graphiquement la traction du ressort l'emporte sur l'interaction avec la surface, le système revient vers sa position d'équilibre en tentant de diminuer z . Le résultat se transpose aisément si $z = z_1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

La position d'équilibre est stable.

· Au voisinage de z_2 : $z = z_2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) :

$$\omega_0^2(z-l_0) < \frac{K}{m(D-z)^2}$$

graphiquement l'interaction avec la surface l'emporte sur la traction du ressort, le système se rapproche de la surface et

donc s'écarte de sa position d'équilibre en tentant d'augmenter z . Le

résultat se transpose aisément si $z = z_1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

La position d'équilibre est instable.

I.A.3.d. Sur le graphique, la position z^* correspond à z_l . (Remarque : la pointe ne doit pas être trop proche de la surface).

I.B. Système excité mais sans interaction avec la surface.

I.B.1. Il faut désormais tenir compte de l'excitation sinusoïdale du support de la lame. L'équation du mouvement après projection sur l'axe Oz

$$\frac{K}{(D-z)^2} - \gamma \dot{z} - k(z - H(t) - l_0) = m \ddot{z}$$

devient :

En utilisant les notations précédentes :

$$\ddot{z} + 2\beta\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_0 + \omega_0^2 H^\circ \cos(\omega t)$$

On envisage la résolution de cette équation en utilisant les grandeurs

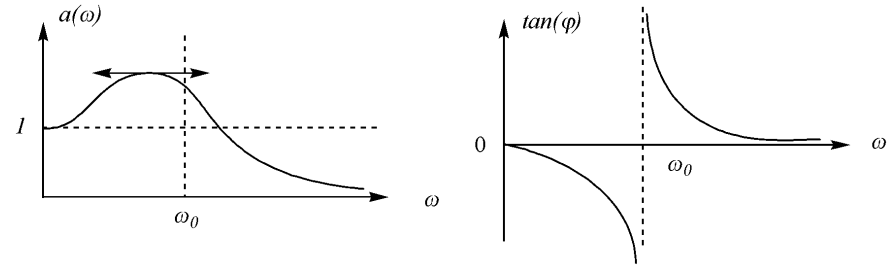
complexes : $\ddot{z} + 2\beta\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_0 + \omega_0^2 H^\circ \exp(i\omega t)$ dont la solution

complexe est $z = l_0 + \underline{A}(\omega) \exp(i\omega t)$. L'amplitude complexe du mouvement vérifie :

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\omega_0^2 H^\circ}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\beta\omega_0 \omega} = a(\omega) H^\circ \exp(i\varphi)$$

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega_0 \omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{2\beta\omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

I.B.2. Dans le cas où $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude du mouvement présente un maximum.



I.B.3.a. $a(\omega)$ est maximum si $g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega_0 \omega)^2$ est minimum.

$$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega(\beta\omega_0)^2 = 0 \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\beta^2} \quad \text{et} \quad \beta < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La pulsation de résonance est donc : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\beta^2} \quad \text{et} \quad \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$a_r = \frac{1}{2\beta\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad T_r = \tan \varphi_r = -\frac{\sqrt{1 - 2\beta^2}}{\beta}$$

I.B.3.b.

$$Q = \frac{1}{2\beta} \quad a_r = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q > 10 \quad a_r \approx Q}$$

I.B.3.d.

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'amplitude de la lame, à la résonance, est importante.

I.C. Système excité, en interaction avec la surface.

I.C.1. Développement de Taylor au premier ordre.

$$F_{\text{int}} = \frac{K}{(D-z)^2} = \frac{K}{(D-z_*(1+\varepsilon))^2} = \frac{K}{(e_* - z_*\varepsilon)^2} = \frac{K}{e_*^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_*}{e_*}\varepsilon\right)^2} \approx \frac{K}{e_*^2} \left(1 + 2\frac{z_*}{e_*}\varepsilon\right)$$

I.C.2. Linéarisation de l'équation différentielle. En projection sur l'axe Oz, l'équation devient :

$$\frac{K}{(D-z)^2} - \gamma \dot{z} - k(z - H(t) - l_0) = m \ddot{z}$$

$$m \ddot{z} + \gamma \dot{z} + kz - \frac{K}{(D-z)^2} - kl_0 = kH(t)$$

$$m z_* \ddot{\varepsilon} + \gamma z_* \dot{\varepsilon} + k z_* + k z_* \varepsilon - \frac{K}{e_*^2} \left(1 + 2\frac{z_*}{e_*}\varepsilon\right) - kl_0 = kH(t)$$

$$-\frac{K}{me_*^2} + \frac{k}{m}(z_* - l_0) + z_* \left(\ddot{\varepsilon} + \frac{\gamma}{m} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{k}{m} - \frac{2K}{me_*^3} \right) \varepsilon \right) = \frac{k}{m} H_0 \cos(\omega t)$$

Par identification :

$$EQ_0 = -\frac{K}{me_*^2} + \frac{k}{m}(z_* - l_0)$$

$$EQ_1 = \ddot{\varepsilon} + \frac{\gamma}{m} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{k}{m} - \frac{2K}{me_*^3} \right) \varepsilon = \ddot{\varepsilon} + 2\beta\omega_0 \dot{\varepsilon} + \left(\omega_0^2 - \frac{2K}{me_*^3} \right) \varepsilon$$

$$EQ_0 = -\frac{K}{me_*^2} + \frac{k}{m}(z_* - l_0) = 0$$

I.C.3 : cela correspond à la situation d'équilibre de la lame en absence d'excitation.

$$\omega'^2_0 = \omega_0^2 - \frac{2K}{me_*^3} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{2K}{\omega_0^2 me_*^3}\right)$$

I.C.4. Par identification :

Soit

$$\omega'^2_0 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{2K}{ke_*^3}\right) = \omega_0^2 (1 - q^2) \quad \boxed{q = \sqrt{\frac{2K}{ke_*^3}}}$$

I.C.4. La forme canonique de l'équation différentielle devient :

$$EQ_1 = \ddot{\varepsilon} + 2\beta' \omega'_0 \dot{\varepsilon} + \omega'^2_0 \varepsilon$$

Par identification : $2\beta' \omega'_0 = 2\beta\omega_0$ soit $\beta' = \beta \frac{\omega_0}{\omega'_0}$

I.C.6. Le traitement de cette nouvelle équation est identique à celui établi lors des questions précédentes de sorte que :

$$\omega'_r = \omega'_0 \sqrt{1 - 2\beta'^2} \quad \text{et} \quad \beta' < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega'_r = \omega'_0 \sqrt{1 - 2\beta'^2} = \omega_0 \sqrt{(1 - q^2) \left(1 - 2\frac{\beta^2}{1 - q^2}\right)} = \omega_0 \sqrt{1 - q^2 - 2\beta^2}$$

$$\frac{\omega'_r}{\omega_r} = \sqrt{\frac{1 - q^2 - 2\beta^2}{1 - 2\beta^2}}$$

Soit,

Il y a donc une diminution de la pulsation de résonance de l'oscillateur en présence d'une interaction avec la surface.

· On peut de la même manière travailler sur le déphasage à la résonance :

$$T'_r = \tan \varphi'_r = -\frac{\sqrt{1 - 2\beta'^2}}{\beta'} = -\frac{\sqrt{1 - 2\frac{\beta^2}{1 - q^2}}}{\beta} \sqrt{1 - q^2} = -\frac{\sqrt{1 - q^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

Soit,

$$\frac{T'_r}{T_r} = \frac{\sqrt{1 - q^2 - 2\beta^2}}{\sqrt{1 - 2\beta^2}}$$

L'interaction avec la surface modifie le déphasage de l'oscillateur par rapport à la source d'excitation.

I.C.7. Le facteur de qualité de l'oscillateur est aussi affecté par

$$Q' = \frac{1}{2\beta'} = Q \frac{\omega'_0}{\omega_0} = Q \sqrt{1-q^2}$$

l'interaction avec la surface : . Dès lors le facteur de qualité diminue en présence d'une interaction. Les conséquences sont les suivantes : une amplitude moins importante à la résonance et une enveloppe plus large de la courbe $a(\omega)$.

I.C.8. Le système est éventuellement étalonné pour que la pulsation ω d'excitation corresponde à ω_r sans interaction. A l'approche des atomes de la surface, le décalage de la pulsation de résonance fait que l'amplitude des oscillations de la pointe va diminuer. Un capteur adapté peut enregistrer cette variation et ainsi repérer la position des atomes déposés sur la surface.

On peut de la même manière travailler sur le déphasage et enregistrer ces variations lors d'une interaction avec les atomes déposés sur la surface.

Dans la littérature, ces deux procédés sont appelés mode « tapping » et mode contraste de phase.

Partie III : Moteur moléculaire.

III.A Approche mécanique :

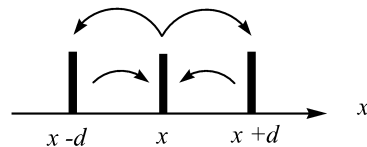
III.B. Approche statistique :

$$[D]: m^2 s^{-1} \quad [d]: m \quad \boxed{\tau_d = \frac{d^2}{D}}$$

III.B.1.a.

III.B.1.b.

Gains : transition de $x-d$ vers x et transition de $x+d$ vers x
Pertes : transitions de x vers $x-d$ et $x+d$.



Bilan de particules entre t et $t + \Delta t$:

Gains : $p(N(x-d, t) + N(x+d, t))$

Pertes : $2pN(x, t)$

Soit,

$$N(x, t + \Delta t) - N(x, t) = p(N(x-d, t) + N(x+d, t)) - 2pN(x, t)$$

III.B..d. Développement de Taylor au premier ordre en d et Δt .

$$df(x, t) = N(x, t + \Delta t) - N(x, t) = \frac{\partial N}{\partial t}(x, t) \Delta t$$

$$\begin{aligned} dg(x, t) &= p(N(x-d, t) + N(x+d, t)) - 2pN(x, t) \\ &= p[(N(x+d, t) - N(x, t)) - (N(x, t) - N(x-d, t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dg(x, t) &= p \left[\frac{\partial N}{\partial x} \left(x + \frac{d}{2}, t \right) - \frac{\partial N}{\partial x} \left(x - \frac{d}{2}, t \right) \right] d \\ &= pd^2 \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x, t) \right] \end{aligned}$$

Soit,

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x, t) \Delta t = \frac{\Delta t}{\tau_d} d^2 \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x, t) \right] \quad \frac{\partial N}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x, t)$$

C'est une équation aux dérivées partielles modélisant un processus de diffusion.

$$N(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

III.B.1.e. Solution de l'équation :

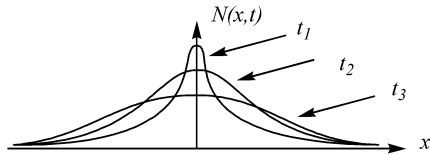
$$\frac{\partial N}{\partial t}(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2} + \frac{x^2}{4D} t^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \left(-\frac{x t^{-\frac{3}{2}}}{2D}\right)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \left(-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2D} + \frac{2x^2 t^{-\frac{5}{2}}}{8D^2}\right)$$

L'équation $\frac{\partial N}{\partial t} N(x,t) = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x,t)$ est bien vérifiée.

III.B.1.f. Évolution de la densité au cours du temps.



III.B.g. L'aire sous la courbe représente la population M d'expériences réalisées.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx = M$$

III.B.2.a. Bilan de particules entre t et $t + \Delta t$:

Gains : $p^+ N(x-d, t) + p^- N(x+d, t)$

Pertes : $(p^+ + p^-) N(x, t)$

Soit,

$$N(x, t + \Delta t) - N(x, t) = p^+ N(x-d, t) + p^- N(x+d, t) - (p^+ + p^-) N(x, t)$$

III.B.2.b. Développement de Taylor au premier ordre en d et Δt .

$$df(x, t) = N(x, t + \Delta t) - N(x, t) = \frac{\partial N}{\partial t}(x, t) \Delta t$$

$$\begin{aligned} dg(x, t) &= p^+ N(x-d, t) + p^- N(x+d, t) - (p^+ + p^-) N(x, t) \\ &= p^- \left[(N(x+d, t) - N(x, t)) - p^+ (N(x, t) - N(x-d, t)) \right] \end{aligned}$$

$$dg(x, t) = p^- \frac{\partial N}{\partial x} \left(x + \frac{d}{2}, t \right) d - p^+ \frac{\partial N}{\partial x} \left(x - \frac{d}{2}, t \right) d$$

$$\text{On pose : } \frac{1}{\tau^+} = \frac{D_F}{d^2} + \frac{v}{2d} \quad \frac{1}{\tau^-} = \frac{D_F}{d^2} - \frac{v}{2d}$$

$$dg(x, t) = \Delta t d \left(\left(\frac{D_F}{d^2} - \frac{v}{2d} \right) \frac{\partial N}{\partial x} \left(x + \frac{d}{2}, t \right) - \left(\frac{D_F}{d^2} + \frac{v}{2d} \right) \frac{\partial N}{\partial x} \left(x - \frac{d}{2}, t \right) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta t d \left[\frac{D_F}{d^2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \left(x + \frac{d}{2}, t \right) - \frac{\partial N}{\partial x} \left(x - \frac{d}{2}, t \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \Delta t \frac{v}{2d} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \left(x + \frac{d}{2}, t \right) + \frac{\partial N}{\partial x} \left(x - \frac{d}{2}, t \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$dg(x, t) = \Delta t \frac{D_F}{d^2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x, t) d^2 - \Delta t v \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) d$$

Soit l'équation,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_F \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - v \frac{\partial N}{\partial x}$$

III.B.2.c. On utilise le changement de variable : $X = x - vt$ et $T = t$.

La dérivation des fonctions de plusieurs variables donne :

$$dN = dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T dX + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X dT = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_t dx + \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_x dt$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_t = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_t + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_t = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_x = -v \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X$$

Et

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T \right)_t = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \right)_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_t + \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_T \right)_X \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_t = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \right)_T$$

Soit,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_F \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - v \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{donne} \quad \cancel{-v \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_X} + \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X = D_F \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \right)_T \quad \cancel{-v \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_X}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_X = D_F \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} \right)_T$$

D'où l'équation ED_Q:

La solution en régime variable est donc :

$$N(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_F t}} \exp \left(-\frac{(x - vt)^2}{4D_F t} \right)$$

III.B.2.d. On retrouve un profil de diffusion couplé avec une propagation sur l'axe Ox à la vitesse moyenne v .

