

Цель занятия:**Деятельностная:**

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

- актуализировать знания о четной, нечетной, периодической функции для тригонометрических функций;
- познакомиться с задачами на построение и анализ тригонометрических функций.

План занятия:

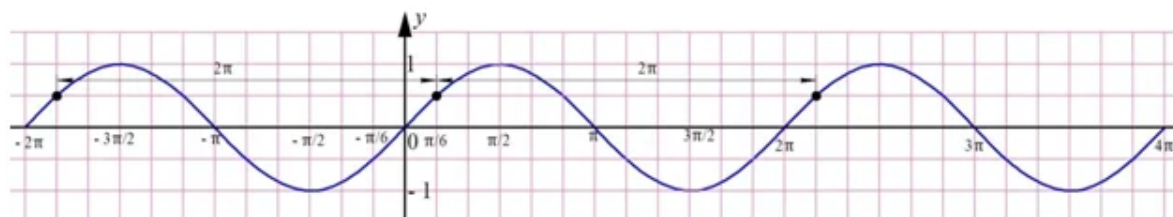
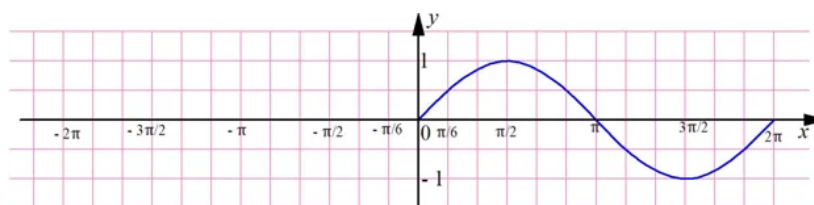
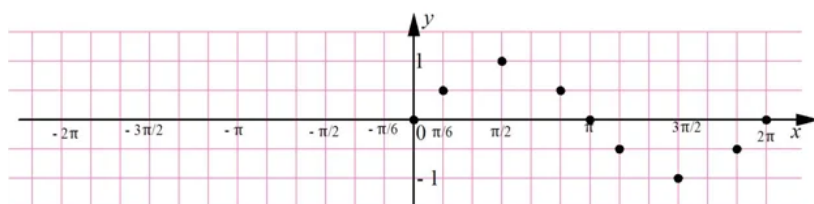
1. Свойства и графики функций $y = \cos x$, $y = \sin x$.
2. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

1. Свойства и графики функций $y = \cos x$, $y = \sin x$. **$y = \sin x$**

Изучение графиков тригонометрических функций начнем с синуса. В тригонометрии при построении графика синуса принято по оси Ox откладывать значение угла в радианах, а не в градусах. Из-за этого в школьной тетради тяжело точно отметить точки, через которые проходит этот график.

Поэтому в учебных целях график строят приближенно (естественно, что на практике точный график можно построить с помощью компьютера с любой требуемой точностью). Считают, что величина $\pi/2$ примерно равна 1,5, то есть дроби $3/2$. Если выбрать масштаб, при котором единице равны 2 клеточки, то $\pi/2$ – это 3 клеточки. Тогда $\pi/6$ – это одна клеточка, а $\pi/3$ – две.

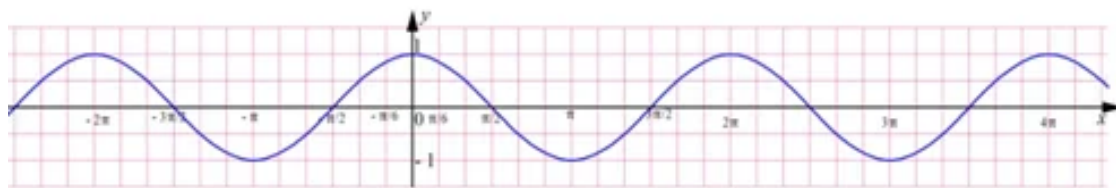
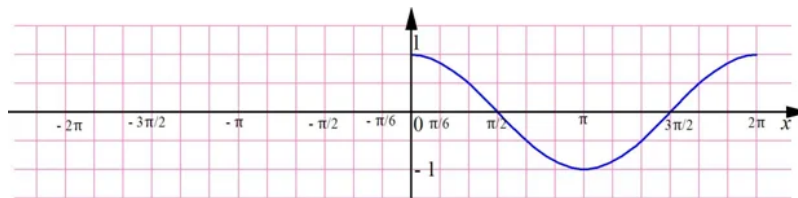
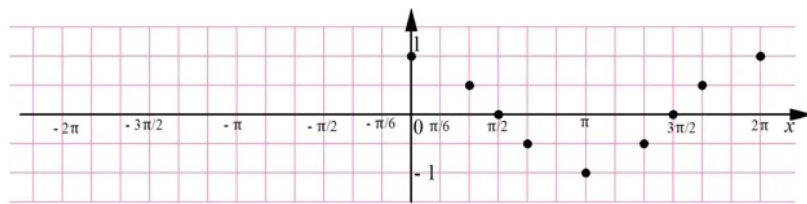
Углом, отличающимся на 2π (на один полный оборот), на единичной окружности соответствует одинаковая точка.



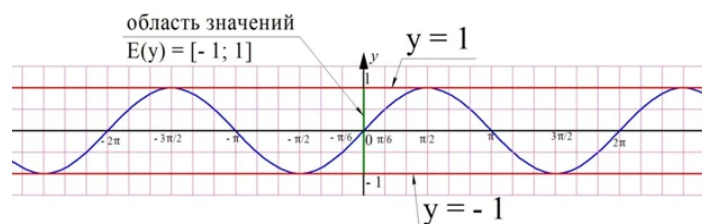
В результате мы получили кривую, которую называют синусоидой.

 $y = \cos x$

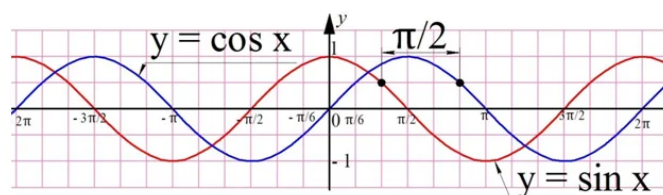
Теперь построим график косинуса. Мы знаем что $\cos 0 = 1$ $\cos \pi/3 = 1/2$ $\cos \pi/2 = 0$. Получается, что график должен проходить через точки $(0;1)$, $(\pi/3; 1/2)$ и $(\pi/2; 0)$. Можно вычислить, используя симметрию на единичной окружности, ещё несколько точек, которые должны лежать на графике. Не приводя этих вычислений, просто отметим эти точки на плоскости:



Можно заметить несколько **особенностей** полученных графиков. Во-первых, все точки обоих графиков лежат в «полосе» между прямыми $y = 1$ и $y = -1$. Это следствие того, что и у синуса, и у косинуса область значений – это промежуток $[-1; 1]$:



Во-вторых, график косинуса очень похож на синусоиду. Он имеет такую же форму, но просто смещен на $\pi/2$ (3 клеточки) влево. Это не случайно, в будущих уроках мы узнаем причину этого явления. Но, так как график косинуса – это просто смещенная синусоида, то термин «косинусоида» для его обозначения почти не используется – он просто избыточен.



В-третьих, графики обладают периодичностью. Они «повторяются» с периодом 2π . Дело в том, что углам, отличающимся друг от друга на 2π (то есть ровно на один полный поворот в 360°), на единичной окружности соответствует одна и та же точка. То есть справедливы формулы:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

В-четвертых, можно заметить, что график косинуса симметричен относительно оси Ox , а график синуса симметричен относительно начала координат. Это значит, что синус является нечетной функцией, а косинус – четной функцией.

Напомним, что ф-ция $f(x)$ является нечетной, если справедливо условие $f(x) = -f(-x)$

Если $f(x)$ – четная ф-ция, то должно выполняться условие:

$$f(x) = f(-x)$$

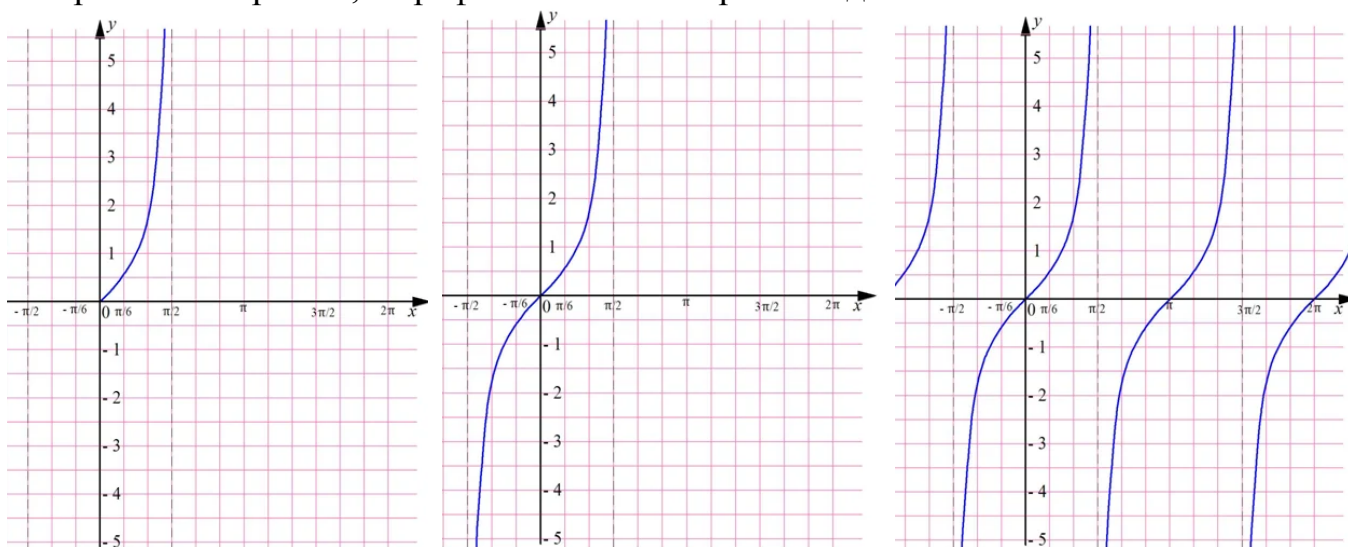
Действительно, если отложить на единичной окружности углы α и $(-\alpha)$, то можно заметить, что их косинусы будут равны друг другу, и синусы окажутся противоположными.

2. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y = \operatorname{tg} x$$

Так как тангенс обладает периодом, равным π , достаточно построить его график на каком-нибудь промежутке длиной π . Далее его можно будет просто перенести на π единиц влево и вправо. Удобно выбрать промежуток от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Дело в том, что на нем она определена во всех точках, кроме его концов.

Через точки $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$ проведем штриховые линии – они означают, что график НЕ должен пересекать их. Ясно, что график проходит через точку $(0; 0)$, ведь $\operatorname{tg} 0 = 0$. Тангенс представляет собой дробь $\sin x / \cos x$. При увеличении x от 0 до $\pi/2$ знаменатель возрастает, а числитель убывает, стремясь к нулю. Поэтому вся дробь неограниченно растет, и график тангенса возрастает до бесконечности:



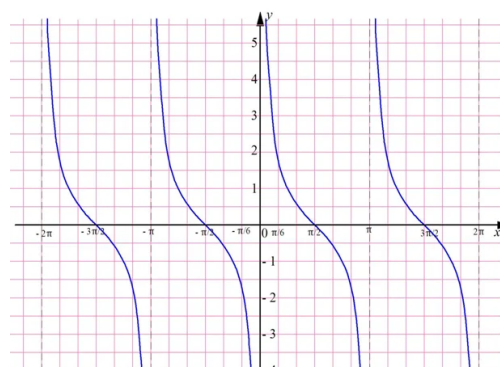
Перечислим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

- 1) $D(y): x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
- 2) Область значений $E(y)$ – все действительные числа.
- 3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.
- 4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ – периодическая. Ее наименьший положительный период равен π .
- 5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает при $D(y): x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

$$y = \operatorname{ctg} x$$

График котангенса – это тангенсоида, которая отображена симметрично относительно оси Ox и смещена на $\pi/2$:

Можно заметить, что вертикальные штриховые линии (асимптоты) графика проходят через точки, кратные π : -2π , $-\pi$, 0 , π , 2π ... Они разбивают координатную прямую на интервалы $(-2\pi; -\pi)$, $(-\pi; 0)$,



$(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$, на каждом из которых ф-ция $y = \text{ctg} x$ убывает. Видно, что котангенс – это периодическая ф-ция с периодом π .

1) $D(y)$: $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$. Другими словами, котангенс не определен для $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

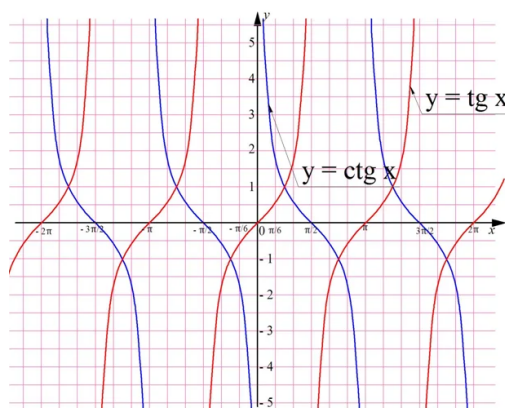
2) Область значений $E(y)$ — все действительные числа.

3) Функция $y = \text{ctg} x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция $y = \text{ctg} x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π .

5) Функция $y = \text{ctg} x$ убывает при $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

Для сравнения покажем на одной плоскости графики тангенса и котангенса:



Задачи

Задание 1. На рисунке изображён график функции $y = a \cdot \cos x + b$. Найдите a .

Решение.

Вариант 1:

По рисунку множество значений функции:

$$-2,5 \leq a \cdot \cos x + b \leq 0,5$$

Заметим, что, если добавить к левой и правой части 1 получим:

$$-2,5 \leq a \cdot \cos x + b \leq 0,5 \quad | +1$$

$$-1,5 \leq a \cdot \cos x + b + 1 \leq 1,5$$

Откуда $b = -1$

$$(-1) \cdot 1,5 \leq (1 \cdot a) \cdot \cos x \leq 1 \cdot 1,5$$

Откуда $a = 1,5$

Решение 2:

По графику $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, тогда $a \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -1$

$$a \cdot 0 + b = -1$$

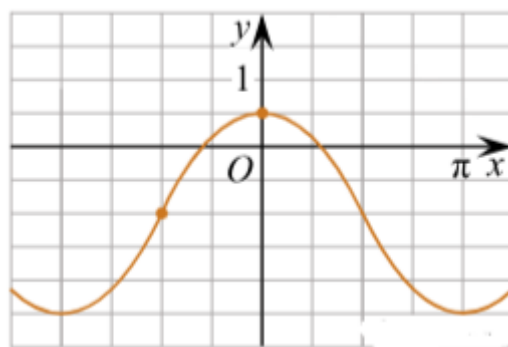
$$b = -1$$

Далее, по графику $f(0) = 0,5$, тогда $a \cdot \cos(0) - 1 = 0,5$

$$a \cdot 1 = 0,5 + 1$$

$$a = 1,5$$

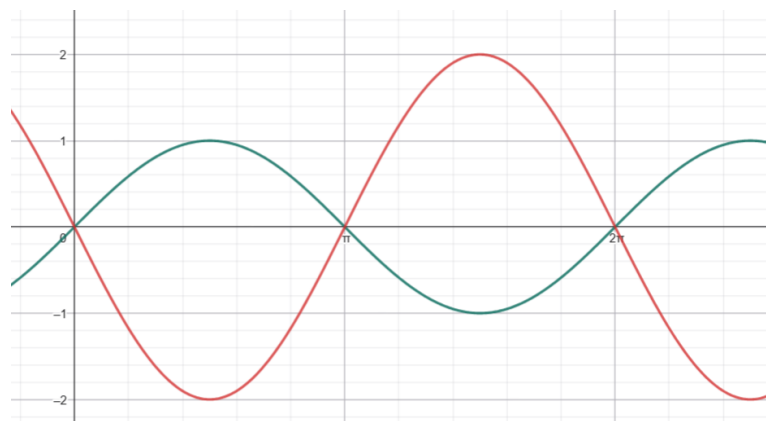
Ответ: $a = 1,5$



Задание 2. Постройте график функции: $y = -2\sin x$.

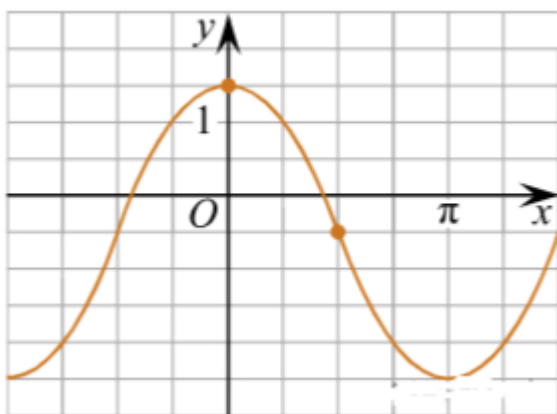
Решение: для поточечного построения на промежутке: $x \in [0; 2\pi]$ построим таблицу:

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$3\pi/2$	$11\pi/6$	2π
$\sin x$	0	1/2	1	1/2	0	-1/2	-1	-1/2	0
$-2\sin x$	0	-1	-2	-1	0	1	2	1	0



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):
 - 1.1. Перечислите основные свойства $y = \cos x$.
 - 1.2. Перечислите основные свойства $y = \sin x$.
 - 1.3. Перечислите основные свойства $y = \operatorname{tg} x$.
 - 1.4. Перечислите основные свойства $y = \operatorname{ctg} x$.
2. Решите предложенные задания (письменно):
 - 2.1. Постройте график функции: $y = 3\sin x$;
 - 2.2. На рисунке изображён график функции $y = a \cdot \cos x + b$. Найдите a .



ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 30 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:



ОД.07 Математика 23.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 23.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: <https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.