

(Le 29/04/02 de 8 h à 11 h . Les calculatrices étaient autorisées)

PARTIE I

I 1) R.A.S. (On utilise la relation de CHASLES des angles de vecteurs .)

I 2)

$$\forall \theta \in J, \frac{dM}{d\theta} = f'(\theta) \overline{u(\theta)} + f(\theta) \overline{u(\theta + \pi/2)}$$

On a

En notant **C.I.** la condition imposée on a les équivalences suivantes :

$$\text{C.I.} \Leftrightarrow \forall \theta \in J, \frac{dM}{d\theta} \text{ est colinéaire à } \cos(2\theta + \pi/2) \overline{u(\theta)} + \sin(2\theta + \pi/2) \overline{u(\theta + \pi/2)}$$

$$\text{c'est à dire C.I.} \Leftrightarrow \forall \theta \in J, \frac{dM}{d\theta} \text{ est colinéaire à } -\sin(2\theta) \overline{u(\theta)} + \cos(2\theta) \overline{u(\theta + \pi/2)}$$

$$\text{C.I.} \Leftrightarrow \forall \theta \in J, \begin{vmatrix} f'(\theta) & -\sin(2\theta) \\ f(\theta) & \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \forall \theta \in J, f'(\theta)\cos(2\theta) - (-\sin(2\theta)f(\theta)) = 0$$

C.Q.F.D.

REMARQUE : la partie « En déduire » de l'énoncé est peut-être un peu pénible .

En effet le vecteur $\overline{u(3\theta)}$ possède 2θ pour angle polaire dans le repère local R_θ

($O, \overline{u(\theta)}, \overline{u(\theta + \pi/2)}$) qui est orthonormé direct . En conséquence la **C.I.** s'exprime par

l'orthogonalité des vecteurs $\cos(2\theta) \overline{u(\theta)} + \sin(2\theta) \overline{u(\theta + \pi/2)}$ et $\frac{dM}{d\theta}$ ce qui donne directement (puisque R_θ est orthonormé) $\cos(2\theta)f'(\theta) + \sin(2\theta)f(\theta) = 0$. C.Q.F.V.

I 3) R.A.S. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'ensemble des solutions de } E \text{ sur }]-\pi/4, \pi/4[\text{ est} \\ f_\lambda :]-\pi/4, \pi/4[\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \lambda \sqrt{\cos(2\theta)} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

REMARQUE : cette question est techniquement sans intérêt si on utilise la calculatrice ...

I 4) R.A.S.

$$\text{On passe de } C_\lambda \text{ à } C_\mu \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } \frac{\mu}{\lambda}$$

I 5) Supposons qu'une telle solution existe et notons la f .

La résolution de E sur chacun des intervalles où $\cos(2\theta)$ ne s'annule pas impose l'existence d'une

suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in]-\pi/4 + n\pi/2, \pi/4 + n\pi/2[, f(\theta) = \lambda_n \sqrt{|\cos(2\theta)|}$$

De plus la continuité de f impose que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(\pi/4 + n\pi/2) = \lambda_n \sqrt{|\cos(\pi/2 + n\pi)|} = 0$ et ceci est effectivement imposé par E . On obtient alors sur chacun des $]-\pi/4 + n\pi/2, \pi/4 + n\pi/2[$

$$f'(\theta) = \lambda_n \varepsilon_n \frac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{|\cos(2\theta)|}}$$

où ε_n vaut 1 ou -1 suivant le signe de $\cos(2\theta)$. Si $\lambda_n \neq 0$ alors la limite de $f'(\theta)$ en $\pi/4 + n\pi/2$ à gauche vaut $+\infty$ ou $-\infty$ donc le théorème du point d'arrêt généralisé permet d'en déduire $f'_g(\pi/4 + n\pi/2) = \pm \infty$ et donc f n'est pas dérivable en ces points $\pi/4 + n\pi/2$. C'est impossible.

L'équation différentielle E n'admet que la fonction partout nulle pour solution sur tout intervalle qui contient un point de la forme $\pi/4 + n\pi/2$ avec n dans $\mathbb{Z}$.

I 6) On a $\forall \theta \in]-\pi/4, \pi/4[, f_1(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

$$\forall \theta \in]-r, r[, f_1(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \theta^k$$

On posera

où r est une constante strictement positive.

I 6)-1 R.A.S.

Le Développement Limité à l'ordre 4 de f_1 en 0 est $f_1(\theta) \underset{0}{=} 1 - \theta^2 - \frac{\theta^4}{6} + o(\theta^4)$

REMARQUE : dans la mesure où le D.L. 4 de f_1 est nécessaire au calcul du D.L. 3 du premier membre de E et que ce calcul conduit à connaître le coefficient a_4 du D.L. 4 de f_1 je ne comprends vraiment pas pourquoi l'énoncé ne demande pas le D.L. 4 de f_1 au lieu de son D.L. 3 ???

I 6)-2 REMARQUE : étant donné la possibilité d'utiliser une calculatrice il y a fort à parier que le cours demandé en début de question y était stocké et la question perd alors de son intérêt !

$$f_1(\theta) \underset{0}{=} \sqrt{1 - 2\theta^2 + o(\theta^3)} \underset{u = -2\theta^2 + o(\theta^3)}{=} \sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$$

. Ceci conduit à

$$f_1(\theta) \underset{0}{=} 1 - \frac{2\theta^2}{2} + o(\theta^2) \underset{0}{=} 1 - \theta^2 + o(\theta^2)$$

C.Q.F.R.

REMARQUE : je ne comprends pas trop l'intérêt d'une telle question puisqu'il suffit de taper

Taylor ($\sqrt{\cos(2\theta)}$), θ , 2, 0)

sur une T.I. 89 pour atteindre ces résultats !

Peut-être a-t-on imposé l'autorisation des calculatrices au (ou à la) concepteur (conceptrice) de cette épreuve ?

I 6)-3 La formule de **TAYLOR** avec reste de **YOUNG** donne

$$f_1(\theta) = \left(\sum_{k=0}^3 \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!} \theta^k \right) + o(\theta^3)$$

et l'unicité du D.L. 3 de f_1 en 0 donne

$$\begin{cases} f_1'(0) = f_1^{(3)}(0) = 0 \\ f_1''(0) = -2 \end{cases}$$

. (Bien entendu on peut retrouver ces résultats très vite avec une T.I. 89

en tapant $d(\sqrt{\cos(2\theta)}, \theta, k) | \theta = 0$ (avec k égal successivement à 1, 2, 3).)

PARTIE II

II 1)

II 1) -1 R.A.S. On trouve le tableau suivant :

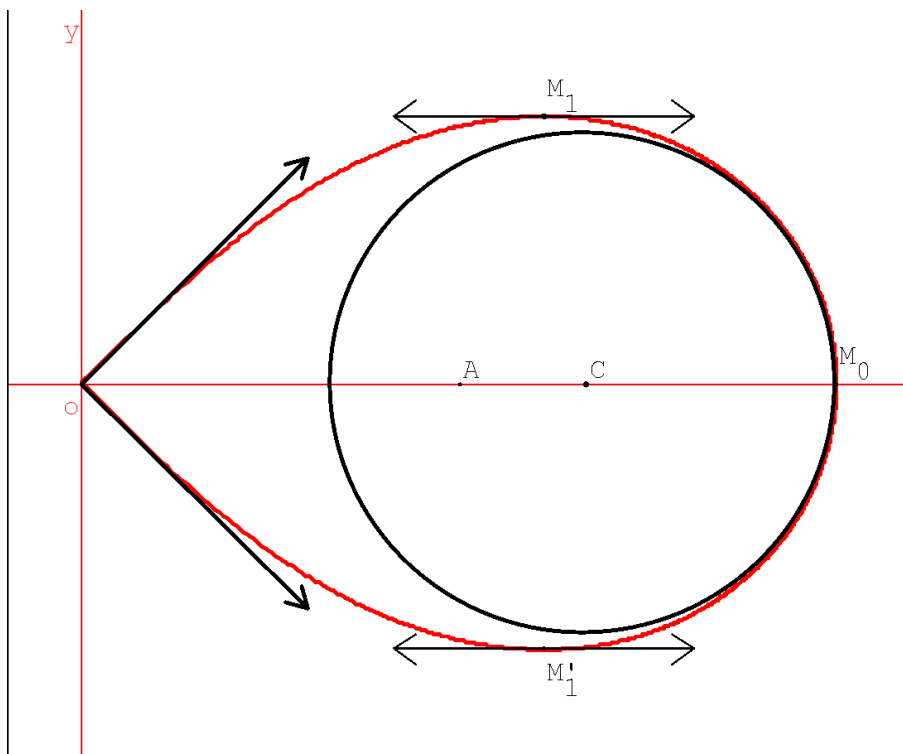
On peut prolonger par continuité f_1 en $-\pi/4$ et en $\pi/4$ en lui donnant pour valeur 0 et dans ce cas on sait que la courbe passe par l'origine « sous l'angle polaire » donc les demi-tangentes de départ (en $M(-\pi/4)$) et d'arrivée (en $M(\pi/4)$) en l'origine sont dirigées respectivement par $\frac{1}{i} - \frac{1}{j}$ et $\frac{1}{i} + \frac{1}{j}$.

II 1) -2 R.A.S.

Les tangentes horizontales le long de C_1 sont les tangentes aux points $M(-\pi/6)$ de rayon polaire $\sqrt{2}/2$ et $M(\pi/6)$ de rayon polaire $\sqrt{2}/2$.

La seule tangente verticale à C_1 est celle en $M(0)$ de coordonnées $(1, 0)$.

Sur le dessin ci-dessous les points $M(0)$, $M(\pi/6)$, $M(-\pi/6)$ sont respectivement notés M_0 , M_1 , M'_1



II 1) -3 R.A.S.

$$\overline{T}^{\mathbb{N}}(0) = j^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \overline{N}^{\mathbb{N}}(0) = -i^{\mathbb{N}}$$

En notant R le rayon de courbure de C_1 en $M(\theta)$ on a $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} / \frac{d\alpha}{d\theta}$ et le calcul donne

Le rayon de courbure de C_1 en le point d'angle polaire θ vaut $\frac{1}{3\sqrt{\cos(2\theta)}}$ et en particulier au point $M(0)$ (de coordonnées $(1, 0)$ il vaut $\frac{1}{3}$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{t^{1/2}} dt \quad \dots$$

II 2) R.A.S. On se ramène à une intégrale de **RIEMANN**

II 3) La longueur de la restriction de C_1 à $[-\alpha, \alpha]$ vaut

$$l(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\| \frac{dM^{\mathbb{N}}}{d\theta} \right\| d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta = 2 \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta \quad . \text{ La convergence de } \frac{1}{2} I$$

montre (par définition) que la limite de $\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta$ lorsque α tend vers $\pi/4$ existe dans

$\mathbb{R}$ et vaut $\frac{1}{2} I$. Ainsi la limite de $l(\alpha)$ lorsque α tend vers $\pi/4$ existe et vaut $2 \frac{1}{2} I = I$.
C.Q.F.D.

II 4)

II 4)-1 R.A.S. Faire un petit changement de variable .

II 4)-2 R.A.S. Idem .

II 5) R.A.S. On trouve :

$$A = \frac{1}{2}$$

PARTIE III

III 1) L'intégrale étant deux fois généralisée on étudie la convergence des intégrales

$$B_1(\alpha, \beta) = \int_0^{1/2} \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad B_2(\alpha, \beta) = \int_{1/2}^1 \varphi(t) dt$$

La première se traite par le théorème des équivalents et se ramène à une intégrale de **RIEMANN** .

La deuxième se ramène à la première par le changement de variable $t = 1 - u$.

L'intégrale $B(\alpha, \beta)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

III 2)

Il suffit d'effectuer le changement de variable $t = 1 - v$. Le calcul a quasiment été fait au **III 1**) .

III 3) R.A.S. On peut réaliser le changement de variable proposé en posant ici $\theta = \text{Arc sin}(\sqrt{t})$ et on obtient ...

III 4) R.A.S. : Simple vérification .

PARTIE IV (algorithmique)

IV 1)

IV 1)-1 $M_0^1 = M(0)$ a pour coordonnées polaires $(1, 0)$ donc aussi $(1, 0)$ pour coordonnées cartésiennes. $M_1^1 = M(\pi/4) = O$ donc

$$\left(\begin{array}{c} M_0^1 \\ (O, i, j) \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } \left(\begin{array}{c} M_1^1 \\ (O, i, j) \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } 2L_1 = 2$$

IV 1)-2 Avec T.I. 89 :

$[\sqrt{(\cos(2*t))*\cos(t)}; \sqrt{(\cos(2*t))*\sin(t)}]$ STO p(t) (ENTER)

p(k*pi/(4*n)) STO m(k, n) (ENTER)

$\sum (\text{norm}(m(k, n) - m(k-1, n)), k, 1, n)$ STO l(n) (ENTER)

Ensuite il suffit de taper $m(0, 2)$ puis $m(1, 2)$ et $m(2, 2)$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{c} M_0^2 \\ (O, i, j) \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } \left(\begin{array}{c} M_1^2 \\ (O, i, j) \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 2^{-5/4} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ 2^{-5/4} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{array} \right. \text{ et } \left(\begin{array}{c} M_2^2 \\ (O, i, j) \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Enfin en tapant $2l(2)$ (♦ ENTER) on obtient $2L_2 \approx 2,46$

IV 1)-3 Avec T.I. 89 on tape

seq(m(k, 4)[1, 1], k, , 0, 4) STO a (♦ ENTER)

seq(m(k, 4)[2, 1], k, , 0, 4) STO b (♦ ENTER)

augment(List Mat(a); List Mat(b)) (ENTER)

Pour obtenir les résultats suivants :

$$\begin{array}{c} M_0^4 \\ R_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{c} M_1^4 \\ R_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \approx 0,94 \\ \approx 0,19 \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{c} M_2^4 \\ R_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \approx 0,78 \\ \approx 0,32 \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{c} M_3^4 \\ R_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} \approx 0,51 \\ \approx 0,34 \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{c} M_4^4 \\ R_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

IV 2) Avec le logiciel MATHEMATICA :

Voici une entrée possible :

```
Point1[t_] := {Sqrt[Cos[2*t]] * Cos[t], Sqrt[Cos[2*t]] * Sin[t]};
M[k_, n_] := M[k, n] = Point1[k * Pi / (4*n)];
L[n_] := L[n] =
Sum[Sqrt[(M[k, n] - M[k-1, n]) . (M[k, n] - M[k-1, n])], {k, 1, n}];
(*On a intérêt à utiliser ici des fonctions à mémoire pour éviter
de calculer deux fois les mêmes quantités *)
Delta[p_] := Abs[2*L[2^(p-1)] - 2*L[2^p]];
Sol = {N[2*L[1]]}; p = 1;
While[N[Delta[p] - 10^(-3)] > 0, AppendTo[Sol, N[2*L[2^p]]]; p++];
Join[Sol, {N[2*L[2^p]]}]
```

Et voici la sortie correspondante : {2., 2.46495, 2.58301, 2.61237, 2.61965, 2.62146, 2.62191}

Voici une traduction possible pour T.I. 89 :

Voir **IV 1)-2** pour les trois premières entrées .

abs(2*(1(2^x) - 1(2^(x-1)))) STO d(x) (ENTER)

Les lignes suivantes sont ensuite stockées dans un programme nommé ici `essai` :

```
1 STO i : 1 STO e :  
: [approx(2*I(1))] STO sol  
: approx(2*I(1)) STO a  
: While e > 10^(-3)  
: approx(2*I(2^i)) STO b  
: augment ( sol , [b] ) STO sol  
: i + 1 STO j : j STO i  
b - a STO e : b STO a  
: Endwhile
```

Ensuite il suffit de taper

`essai ()`

(ENTER)

`sol`

(ENTER)

Pour obtenir la liste suivante (si on travaille en « Float 6 ») :

[2. 2.46495 2.58301 2.61237 2.6195 2.62146 2.62191]

Autrement dit $2L \approx 2,6219$ à 10^{-3} près par défaut

N.B. Le corrigé ci dessus est évidemment très incomplet mais je compte utiliser sa version complète pour un futur devoir surveillé et donc j'aimerais qu'il ne soit pas entièrement disponible sur le net !

Dominique MILLET (mai 2002)