

Enunț:

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} - 8.$$

-b). Să se demonstreze că această lege de compoziție este asociativă.

Rezolvare:

Ca să demonstrăm că o lege de compoziție este asociativă trebuie să facem două calcule distincte în care apar compuse **trei** elemente, nu două: un calcul cu paranteze pentru primul și al doilea element al legii de compoziție (calcul pe care eu îl numesc „calculul pentru partea stângă”) și un calcul cu paranteze pentru al doilea și al treilea element al legii de compoziție (calcul pe care eu îl numesc „calculul pentru partea dreaptă”). Cele două calcule trebuie să ne conducă la un rezultat identic dacă legea este asociativă. În acest caz, parantezele nu-și mai au rostul.

Dacă, în schimb, obținem rezultate diferite, atunci sigur am greșit pe undeva... :) Căci, încă n-am întâlnit problemă de bac în care ni se cerea să arătăm că legea este asociativă și să obținem rezultate diferite. Decât atunci când era o greșeală de tipar sau când greșeam eu la calcule; dar, după revizuirea calculelor plictisitoare, obțineam coincidența rezultatelor pentru calculul din stânga și calculul din dreapta.

Să începem, deci, cu calculul pentru partea stângă. Pentru acest calcul voi folosi litera S. Așadar, avem de calculat

$$S = (x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{(x \circ y)^3 + z^3} - 8. \quad \text{Dar}$$

$$(x \circ y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - 8 \right)^3 = x^3 + y^3 - 8, \text{ căci radicalul de ordinul 3 ridicat}$$

la puterea 3 este un rezultat fără putere și fără radical, ca și cum puterea și ordinul radicalului se reduc reciproc. Așadar,

$$S = \sqrt[3]{(x \circ y)^3 + z^3} - 8 = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 8 + z^3} - 8, \text{ adică}$$

$$S = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} - 16.$$

Observați că am obținut deja un rezultat fără paranteză! Iar acest rezultat este deja foarte relevant pentru un ochi format.

Dar să nu anticipăm prea mult. Să trecem la calculul pentru partea dreaptă,

$$\text{pentru care voi folosi litera D. Avem } D = x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{x^3 + (y \circ z)^3} - 8.$$

$$\text{Și cum } (y \circ z)^3 = \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3} - 8 \right)^3 = y^3 + z^3 - 8, \text{ obținem}$$

$$D = \sqrt[3]{x^3 + (y^3 + z^3 - 8) - 8} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 16}.$$

Tot un rezultat fără paranteze! Și chiar identic cu cel pentru litera S! Așadar, S=D, iar legea de compoziție dată este asociativă, așa cum trebuia să demonstrăm.

În [următorul articol](#) vom mai formula și rezolva o problemă legată de această lege de compoziție.