Lois de probabilité à densité

I. Loi de probabilité à densité

1. Rappel

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues possibles $= \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
On considère l'événement A : « On obtient un résultat pair. » $A = \{2; 4; 6\}$
On considère l'événement élémentaire E : « On obtient un 5 » $E = \{5\}$
On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 1€.
- Si le résultat est 1, on gagne 5€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 2€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $= \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 1, 5 ou -2.
$X(1) = 5$ $X(2) = 1$ $X(3) = -2$ $X(4) = 1$ $X(5) = -2$ $X(6) = 1$
Pour une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité peut être résumée dans un tableau.

x_i	-2	**1**	**5**
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

La variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est dite **discrète**. Il existe des variables aléatoires **continues** qui prennent une infinités de valeurs dans un intervalle donné.

Remarque
N et Z sont des ensembles discrets mais infinis.

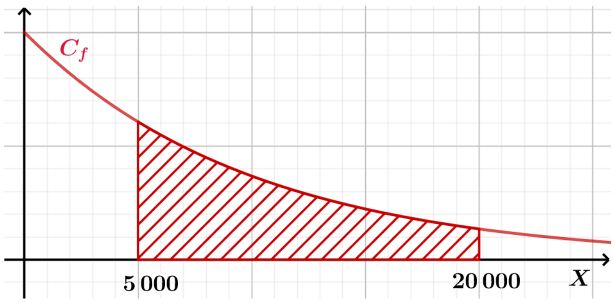
2 Variable aléatoire continue

Exemple
Une entreprise fabrique des disques durs. On définit une variable aléatoire qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0; +\infty[$. Une telle variable aléatoire est dite **continue**.

3. Fonction à densité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle I, sa loi de probabilité est associée à la probabilité de tout intervalle inclus dans I. On a ainsi recours à une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et appelée **fonction de densité**.

Exemple
Dans l'exemple précédent, on peut par exemple être mené à calculer $P(5\,000 \leq X \leq 20\,000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit comprise entre 5 000 heures et 20 000 heures. Pour cela, on utilise la fonction de densité f définissant la loi de probabilité.
La probabilité $P(5\,000 \leq X \leq 20\,000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équations $x = 5\,000$ et $x = 20\,000$.



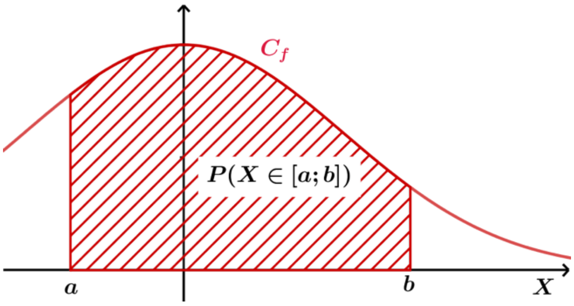
$$P(5\,000 \leq X \leq 20\,000) = \int_{5\,000}^{20\,000} f(t)dt$$

Définition
Soit Ω un espace probabilisé. On appelle **fonction de densité** (ou **densité**) toute fonction f définie, positive et intégrable sur R telle que

$$\int_R f(t)dt = 1$$

Si X est une variable aléatoire définie sur Ω, la **probabilité** de l'événement $\{\omega\in\Omega, X(\omega)\in[a; b]\}$, où $[a; b]$ est un intervalle de R, est égale à l'aire sous la courbe f dans l'intervalle $[a, b]$, soit

$$P(X\in[a, b]) = P(a\leq X\leq b) = \int_a^b f(t)dt$$



Remarque
$P(X = a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ donc $P(X\leq a) = P(X < a)$

4. Espérance
Définition
On considère une variable aléatoire X de densité f sur R. L'espérance mathématique de X est le réel.

$$E(X) = \int_R t\cdot f(t)dt$$

Méthode
Utiliser une loi de densité
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/0Ry-2yLsANA**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/oI-tbf9sP6M**
Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue X, en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 20]$ avec une densité de probabilité f définie sur $[0; 20]$ par

$$f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$$

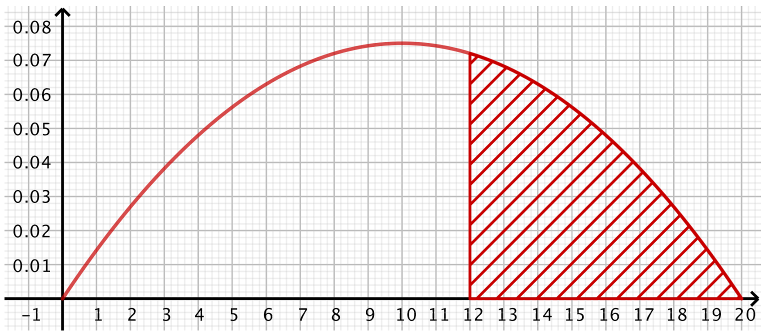
a. Démontrer que f est une densité de probabilité sur $[0; 20]$.
b. Calculer la probabilité de l'événement E « La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes ».
c. Calculer l'espérance mathématique de X.

Solution
a. f est un polynôme du second degré définie sur l'intervalle $[0; 20]$.
$f(0) = f(20) = 0$
f est positive entre ses racines donc
$\forall x\in[0; 20], f(x)\geq 0$

$$\int_0^{20} f(t)dt = \left[0,0075t^2 - 0,00025t^3\right]_0^{20}$$

$$\int_0^{20} f(t)dt = 0,0075\times 20^2 - 0,00025\times 20^3 = 1$$

f est donc une densité de probabilité sur $[0; 20]$.



b. $P(E) = P(12\leq X\leq 20) = \int_{12}^{20} f(t)dt = \left[0,0075t^2 - 0,00025t^3\right]_{12}^{20}$

$P(E) = 0,0075\times 20^2 - 0,00025\times 20^3 - 0,0075\times 12^2 + 0,00025\times 12^3 = 0,352$

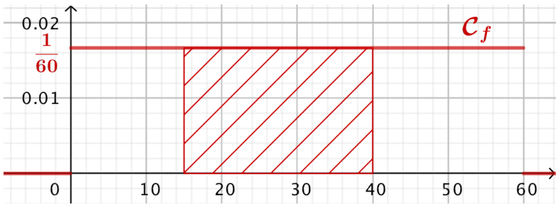
c. $E(X) = \int_0^{20} tf(t)dt = \int_0^{20}\left(0,015t^2 - 0,00075t^3\right)dt = \left[0,005t^3 - 0,0001875t^4\right]_0^{20}$

$E(X) = 0,005\times 20^3 - 0,0001875\times 20^4 = 10$

II. Loi uniforme
1. Exemple

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/yk4ni_iqxKk**

Suite à un problème de réseau, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance entre 14h et 15h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné, on souhaite calculer la probabilité que le client patiente entre 15 et 40 minutes. On désigne par T la variable aléatoire continue qui donne le temps d'attente en minutes.



$P(15\leq T\leq 40) = \frac{40-15}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

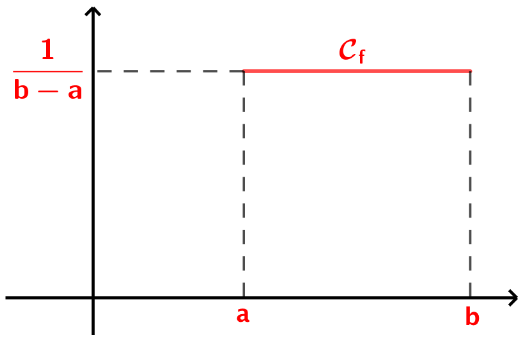
La probabilité $P(15\leq T\leq 40)$ est l'aire sous la courbe représentative de la fonction de densité entre les droites d'équations $x = 15$ et $x = 40$

La fonction de densité associée à T est la fonction f sur l'intervalle $[0; 60]$ définie par

$$\forall x\in[0; 60],\ f(x) = \frac{1}{60}$$

On retrouve ainsi le calcul précédent.

2. Définition et propriété



Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La **loi uniforme** sur $[a; b]$, notée $U([a; b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a; b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $U([a; b])$. On écrit $X\sim U([a; b])$ et

$$\forall x\in[a; b],\ P(a\leq X\leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Démonstration

Soit $x\in[a\,;b]$,

$$P(a\leq X\leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}[t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

3. Espérance mathématique

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $U([a; b])$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

Exemple

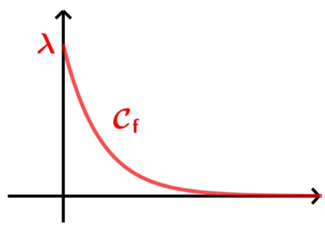
Dans l'exemple précédent, T suit une loi uniforme $U([0; 60])$.

$$E(T) = \frac{0+60}{2} = 30$$

Sur un grand nombre d'appels au service, un client peut espérer attendre 30 min en moyenne.

III. Loi exponentielle

1. Définition et propriétés



Définition

Soit $\lambda > 0$ un réel. La **loi exponentielle** de paramètre λ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Contextes d'utilisation
Durée de vie de composants électroniques, tremblement de terre, désintégration d'un noyau radioactif, …

Propriété
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On écrit $X\sim E(\lambda)$ et

$$\forall x\in[0;+\infty[\,,\ P(X\leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Démonstration

$$\forall x\in[0;+\infty[\,,\ P(X\leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^{-\lambda\times 0} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Remarque

On en déduit directement que $P(X\geq x) = e^{-\lambda x}$

Exemple
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/tL8-UTORSLM**
X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

$$P(1\leq X\leq 3) = P(X\leq 3) - P(X<1) = 1 - e^{-0,1\times 3} - \left(1 - e^{-0,1\times 1}\right) = e^{-0,1} - e^{-0,3}\approx 0,164$$

2. Espérance mathématique

Propriété
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (exigible BAC)
f désigne la densité de la loi exponentielle de paramètre λ. La fonction $g: t\longmapsto t\cdot f(t)$ est continue sur tout intervalle $[0;+\infty[$, donc elle admet des primitives dans cet intervalle.

$$\forall t\in[0;+\infty[,\ g'(t) = f(t) + t\cdot f'(t) = f(t) - \lambda t\cdot f(t) = f(t) - \lambda g(t) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{\lambda}\left(f(t) - g'(t)\right)$$

Donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^x g(t)dt = \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^x f(t)dt - \int_0^x g'(t)dt\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x} - (g(x) - g(0))\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}\right)$$

Donc, par produit des limites,

$$E(X) = \int_0^x g(t)dt = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

Exemple

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$. $E(X) = \frac{1}{0,04} = 25$

3. Durée de vie sans vieillissement

La principale propriété d'une loi exponentielle est son **absence de mémoire**. Par exemple, imaginons que la durée de vie X d'un objet électronique suive une loi exponentielle. Si cet objet est en état de marche à un temps t, la probabilité qu'il soit en état de marche au temps $t+h$ est la même qu'au temps h. Autrement dit, la vieillesse de l'objet n'a aucune incidence sur le temps qu'il restera encore en état de marche. C'est comme si un bébé avait le même temps à vivre (en moyenne) qu'une personne âgée de 80 ans. Il est clair que la longévité d'un humain ne vérifie pas une loi exponentielle… Mathématiquement, cette propriété s'écrit de la façon suivante.

Propriété
Soit $X\sim E(\lambda)$ $\quad\forall x, t\in[0;+\infty[\,,\ P_{X\geq t}(X\geq t+h) = P(X\geq h)$

Démonstration

$$\forall x, t\in[0;+\infty[\,,\ P_{X\geq t}(X\geq t+h) = \frac{P(\{X\geq t+h\}\cap\{X\geq t\})}{P(X\geq t)} = \frac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X\geq h)$$

Méthode
Utiliser la durée de vie sans vieillissement
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/ZS_sW8yq-94**

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0035$. Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

Solution

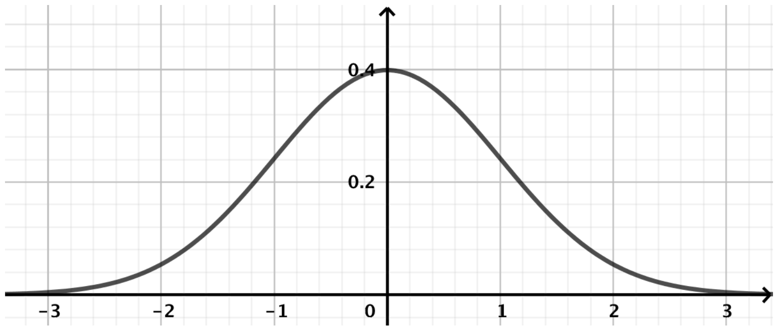
$P_{X\geq 200}(X < 300) = 1 - P_{X\geq 200}(X\geq 300) = 1 - P(X\geq 100) = 1 - e^{-0,0035\times 100} = 1 - e^{-0,35} \approx 0,3$

IV. Loi normale centrée réduite

Définition

La loi normale centrée réduite, notée $N(0;1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$



La représentation graphique de la fonction densité de la loi $N(0;1)$, est une **courbe en cloche (gaussienne) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Le **premier** nombre entre parenthèses désigne **l'espérance**, le **second** la **variance** de cette loi.

Pour une loi normale centrée réduite, **l'espérance** est donc **0** et la **variance** vaut **1**. On en déduit que son **écart-type** vaut également **1**.

Si X suit une loi normale centrée réduite, $\mu = E(X) = 0$ et $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1} = 1$

Contextes d'utilisation

Taille d'un individu, fréquence cardiaque, quotient intellectuel, …

Remarque

Il n'est pas possible de déterminer une forme explicite de primitives de la fonction densité de la loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.

Propriété

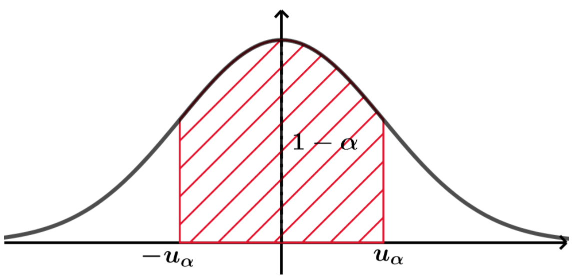
$$X\sim N(0;1) \Rightarrow \forall\alpha\in]0;1[, \exists!\, u_\alpha \in R_+^*,\ P(-u_\alpha\leq X\leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

« il existe un unique »

Démonstration (exigible BAC)

Par symétrie de la courbe de la fonction densité f,

$P(-t\leq X\leq t) = 2P(0\leq X\leq t) = 2\int_0^t f(x)dx = 2F(t)$



où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0. La fonction F étant de dérivée strictement positive, elle est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, il en est de même pour la fonction $2F$. L'aire totale sous la courbe égale 1, donc par symétrie,

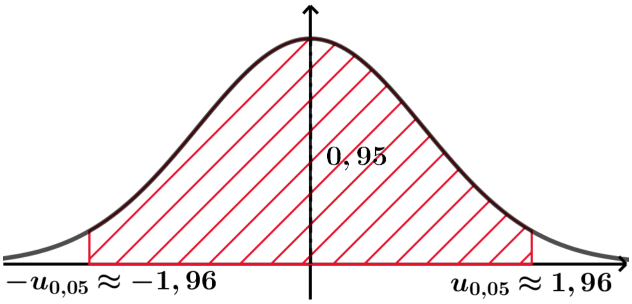
$$\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F(t) = 1$$

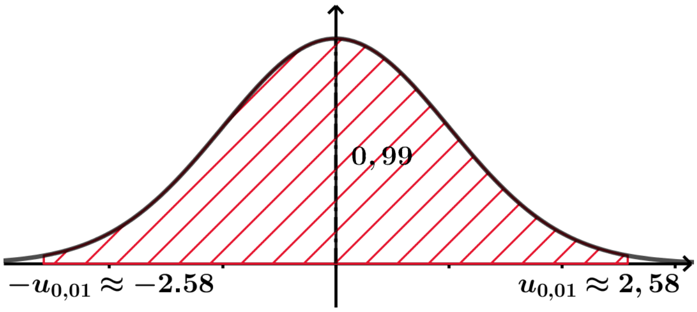
On dresse alors le tableau de variations de $2F$.

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$2F$	$0 \nearrow 1$

$\alpha\in]0;1[\Longleftrightarrow 1-\alpha\in]0;1[$
La fonction $2F$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α de l'intervalle $[0;+\infty[$ tel que $2F\left(u_\alpha\right)=P\left(-u_\alpha\leq X\leq u_\alpha\right)=1-\alpha$

Cas particuliers
$u_{0,05}\approx 1,96$ et $u_{0,01}\approx 2,58$





Espérance mathématique

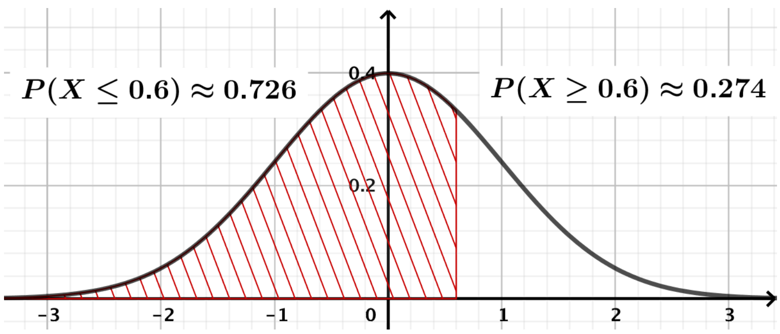
Propriété
$X\sim N(0;1)\Longrightarrow E(X)=0$

Démonstration
La fonction $t\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}$ définie sur R est impaire donc son intégrale sur R (et sur tout intervalle symétrique par rapport à 0) est nulle donc $E(X)=0$

Rappel
Une fonction f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si elle vérifie sur tout son domaine de définition l'égalité $f(-x)=-f(x)$. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque
On admet que si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$ alors la variance $V(X)$ est égale à 1 et donc l'écart-type $\sigma(X)$ est égal à 1.

Méthode
Utiliser une calculatrice pour calculer une probabilité avec une loi normale centrée réduite
🖥️ **Vidéo TI** **https://youtu.be/kZVL8AR-1ug**
🖥️ **Vidéo Casio** **https://youtu.be/qD1Nt5fkQa4**
🖥️ **Vidéo HP** **https://youtu.be/sp6zdgZcrvI**
a. Calculer $P(X\leq 0,6)$.
b. En déduire $P(X\geq 0,6)$ et $P(X\leq -0,6)$.



Solution
a. Avec une TI-83 Plus
Taper sur les touches « **2nde** » et « **VAR/Distrib** »
puis saisir $normalFRéq(-10^{\wedge}99, 0.6, 0, 1)$
Avec une TI-84 Plus
Taper sur les touches « **2ND** » et « **VARS/Distrib** »
puis saisir $normalcdf(-10^{\wedge}99, 0.6, 0, 1)$
Avec une Casio Graph 35+
Taper sur la touche « **OPTN** », puis dans l'ordre « **STAT** », « **DIST** » « **NORM** » et « **Ncd** » puis saisir $NormCD(-10^{\wedge}99, 0.6, 1, 0)$
On a ainsi $P(X\leq 0,6)\approx 0,726$

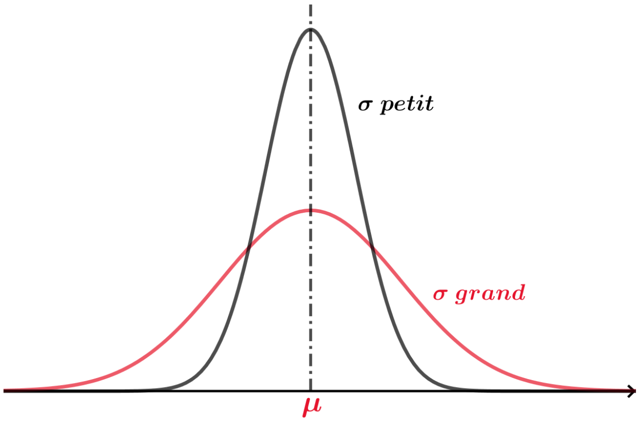
b. $P(X \geq 0,6) \approx 1 - 0,726 \approx 0,274$ (événement contraire) et $P(X \leq -0,6) \approx 0,274$ (par symétrie).

II. Loi normale

Définition
Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N(\mu, \sigma^2)$, signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$. Sa densité f est définie sur R et donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

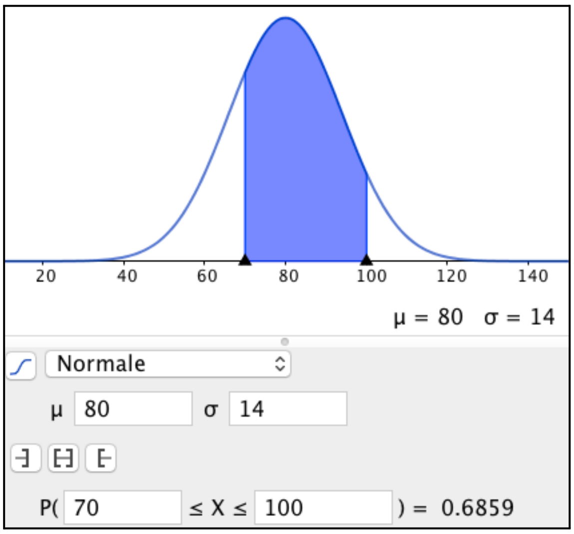
Remarque
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/ZCicmYQsl2Q**
$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
Cela veut dire que
$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = 0 \Leftrightarrow E(X-\mu) = 0$
$\Leftrightarrow E(X) - \mu = 0 \Leftrightarrow E(X) = \mu$
De la même façon,
$Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = 1 \Leftrightarrow Var(X) = \sigma^2$
On remarque que la définition est bien cohérente.



Courbe représentative de la densité de la loi $N(\mu, \sigma^2)$
La courbe représentative de la fonction densité de la loi $N(\mu, \sigma^2)$ est une **courbe en cloche symétrique par rapport à la droite d'équation** $x = \mu$
La courbe est d'autant plus « resserrée » autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit.
L'écart-type (ou la variance) est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.

Méthode
Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour calculer une probabilité avec une loi normale
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/obbgLyTmgsY**
🖥️ **Vidéo TI https://youtu.be/aipNt2M-c80**
🖥️ **Vidéo Casio https://youtu.be/cZwInvxgGas**
🖥️ **Vidéo HP https://youtu.be/yXWtHFkTa1c**
Une compagnie de transport possède un parc de 200 cars. On appelle X la variable aléatoire qui, à un car choisi au hasard, associe la distance journalière parcourue.
On suppose que X suit la loi normale $N(80; 14^2)$.
a. Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour ?
b. Déterminer le réel t tel que $P(X \leq t) = 0,9$. Interpréter.

Solution
a. Avec GeoGebra
Aller dans le menu "Calculs probabilités" et saisir les paramètres dans la fenêtre qui s'ouvre.
Avec une TI-83 Plus
Taper sur les touches « **2nde** » et « **VAR/Distrib** » puis saisir $normalFRéq(70, 100, 80, 14)$
Avec une TI-84 Plus
Taper sur les touches « **2ND** » et « **VARS/Distrib** » puis saisir $normalcdf(70, 100, 80, 14)$
Avec une Casio Graph 35+
Taper sur la touche « **OPTN** », puis dans l'ordre « **STAT** », « **DIST** » « **NORM** » et « **Ncd** » puis saisir $NormCD(70, 100, 14, 80)$
On a ainsi $P(70 \leq X \leq 100) \approx 0,686$



La probabilité qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour est d'environ 68,6%.

b. Avec une TI-83 Plus

Taper sur les touches « **2^nde** » et « **VAR/Distrib** » puis saisir $FracNormale(0.9, 80, 14)$

Avec une TI-84 Plus

Taper sur les touches « **2^ND** » et « **VARS/Distrib** » puis saisir $invNorm(0.9, 80, 14)$

Avec une Casio Graph 35+

Taper sur la touche « **OPTN** », puis dans l'ordre « **STAT** », « **DIST** » « **NORM** » et « **InvN** » puis saisir $InvNormCD(0.9, 14, 80)$

On trouve $t \approx 98$

90% des cars parcourent moins de 98 km par jour.

Méthode

Déterminer une espérance ou un écart-type

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/OSqcC7jGmRg**

a. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(3, \sigma^2)$. Déterminer σ tel que $P(X < 2) = 0,4$

b. Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu, 10^2)$. Déterminer μ tel que $P(Y < 30) = 0,7$

Solution

a. $P(X < 2) = P\left(\frac{X-3}{\sigma} < \frac{2-3}{\sigma}\right) = P\left(Z < -\frac{1}{\sigma}\right)$

où $Z = \frac{X-3}{\sigma}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

On peut ainsi utiliser la calculatrice pour déterminer $-\frac{1}{\sigma}$ tel que $P\left(Z < -\frac{1}{\sigma}\right) = 0,4$

$-\frac{1}{\sigma} \approx -0,253 \Leftrightarrow \sigma \approx 3,95$

b. $P(Y < 30) = P\left(\frac{Y-\mu}{10} < \frac{30-\mu}{10}\right) = P\left(T < \frac{30-\mu}{10}\right)$

où $T = \frac{Y-\mu}{10}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

On peut ainsi utiliser la calculatrice pour déterminer $\frac{30-\mu}{10}$ tel que $P\left(T < \frac{30-\mu}{10}\right) = 0,7$

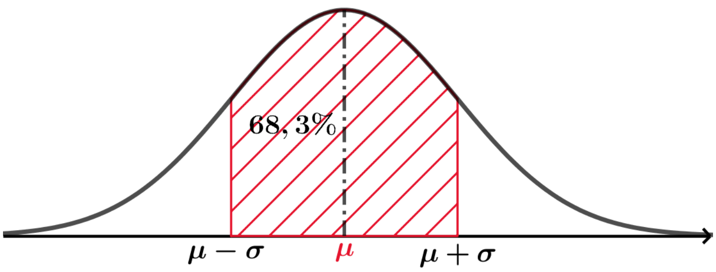
$\frac{30-\mu}{10} \approx 0,524 \Leftrightarrow \mu \approx 24,8$

Quelques valeurs particulières

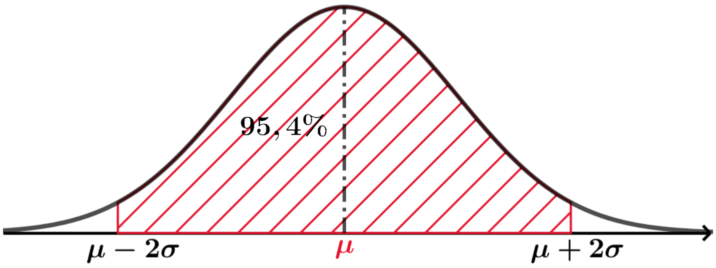
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

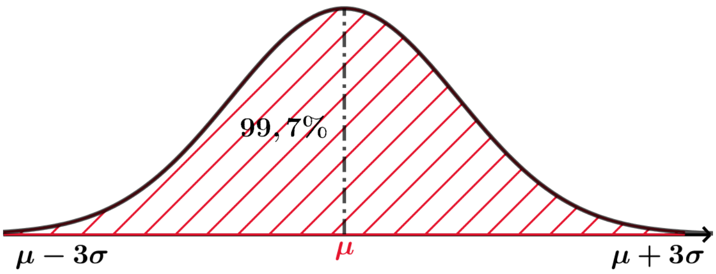
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$



$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$



$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$



$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Démonstration du premier cas

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = P(-1 \leq Y \leq 1)$

où Y variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$. On ne connaît pas de formule explicite d'une primitive de la fonction densité de la loi $N(0, 1)$. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on peut cependant obtenir une valeur approchée de la probabilité $P(-1 \leq Y \leq 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,683$

Exemple

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/w9-0G60l6XQ**

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(60, 5^2)$. Déterminer a et b tel que $P(a \leq X \leq b) = 0,954$

Solution

$a = 60 - 2 \times 5 = 50$ et $b = 60 + 2 \times 5 = 70$

Ainsi $P(50 \leq X \leq 70) \approx 0,954$

III. Théorème de Moivre-Laplace

Rappel

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n, p)$. X associe le nombre de succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Dans ce cas, $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Théorème

n est un entier naturel non nul et $p \in]0; 1[$. Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n, p)$.

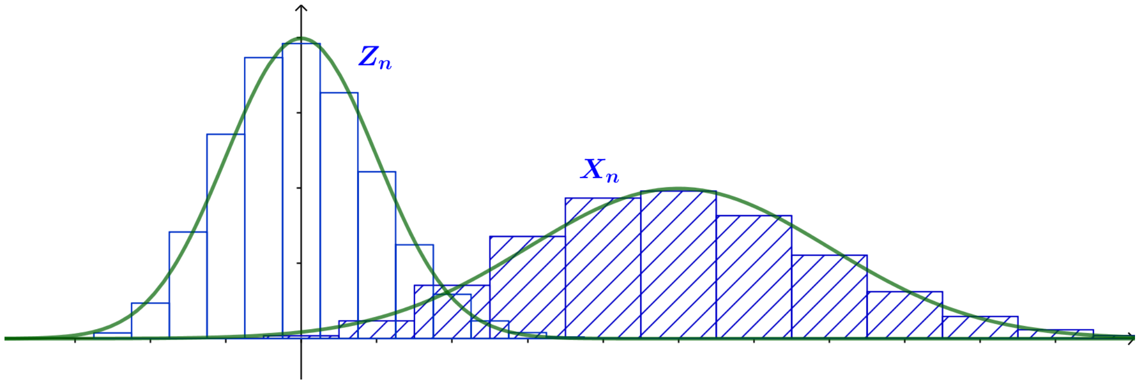
Soit $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ *la variable centrée réduite associée à* X_n.

$$\forall a, b \in R, a < b \Longrightarrow P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Admis -

Remarque

Ce théorème traduit le fait que la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approchée par la probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite. On dira que Z_n **converge en loi** vers la loi normale centrée réduite. Cette approximation est bonne en général pour $np(1-p) \geq 10$.



Méthode

Appliquer le théorème de Moivre-Laplace

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/m9zYSm_NJiw**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/4Y12jMMYyVM**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0,3$. Calculer $P(X \leq 320)$.

Solution

$E(X) = n \times p = 1\,000 \times 0,3 = 300$

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1\,000 \times 0,3 \times 0,7} \approx 14,5$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, la loi de $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \approx \frac{X - 300}{14,5}$ peut être approchée par une loi normale centrée réduite.

$P(X \leq 320) = P\left(\frac{X-300}{14,5} \leq \frac{320-300}{14,5}\right) \approx P(Z \leq 1,38) \approx 0,916$

Remarque

Un calcul direct de $P(X \leq 320)$ donne environ **0,9208**.

L'erreur est de moins d'un centième ($1\,000 \times 0,3 \times 0,7 = 210 \geq 10$).