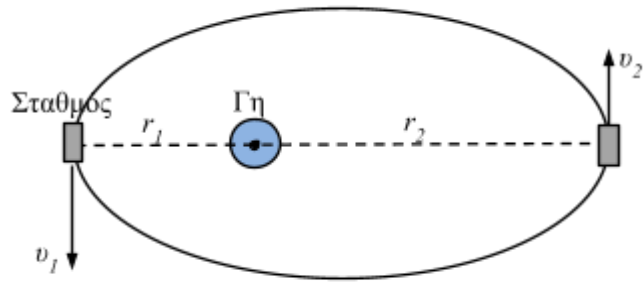


Η άσκηση 105 του σχολικού και η σωστή λύση

Διαστημικός σταθμός περιστρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη, με ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το κέντρο της $r_1 = 7 \cdot 10^6 m$ και $r_2 = 9 \cdot 10^6 m$, αντίστοιχα. Αν η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε απόσταση r_1 (ελάχιστη) είναι $v_1 = 8 \cdot 10^3 m/s$, να υπολογιστούν:



α) Η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε απόσταση r_2 (μέγιστη)

β) Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε μια συσκευή, μάζας $m = 140 kg$, που βρίσκεται στο διαστημικό σταθμό, για να φτάσει στο άπειρο. Δικαιολογήστε γιατί η ενέργεια αυτή είναι ίδια από οποιοδήποτε σημείο της ελλειπτικής τροχιάς και αν πραγματοποιηθεί η βολή.

Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_T = 6400 km$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 m/s^2$

Σημειώσεις:

I) Η περιστροφή του διαστημικού σταθμού γίνεται χωρίς οποιαδήποτε χρήση πυραύλων.

II) Η ελκτική δύναμη μεταξύ συσκευής και διαστημικού σταθμού είναι αμελητέα

Απάντηση

α) Στην προτεινόμενη λύση, που φαίνεται παρακάτω, εφαρμόζει την ΑΔΜΕ από το περίγειο μέχρι το απόγειο και βρίσκει $v_2 = 6,16 km/s$.

Πρώτα όμως πρέπει να διατηρείται η στροφορμή, άρα

$$M v_1 r_1 = M v_2 r_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} \Leftrightarrow v_2 = 8 \cdot \frac{7}{9} = 6,22 km / s$$

Το σφάλμα μικρό περίπου 1%, άρα ίσως έχει λάβει υπόψη τη στροφορμή.

β) Εδώ η εκφώνηση και η προτεινόμενη λύση είναι λάθος.

Στη θέση 1 (περίγειο) η ταχύτητα διαφυγής από ακίνητο σταθμό θα είναι

$$v_{\delta 1} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{r_1}} = R_T \sqrt{\frac{2g_0}{r_1}} = 64 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{20}{7}} \cdot 10^{-3} \approx 10,82 km / s$$

Αν η εκτόξευση γίνει κατά τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ απαιτείται

$$\Delta v_1 = v_{\delta 1} - v_1 = 10,8 - 8 = 2,8 km / s$$

και αντίστοιχη ενέργεια

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m (\Delta v_1)^2 = 70 \cdot (2,8 \cdot 10^3)^2 = 548,8 \cdot 10^6 J$$

Στη θέση 2 (απόγειο) η ταχύτητα διαφυγής από ακίνητο σταθμό θα είναι

$$v_{\delta 2} = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{r_2}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{r_2}} = R_\Gamma \sqrt{\frac{2g_0}{r_2}} = 64 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{20}{9}} \cdot 10^{-3} \approx 9,5 km/s$$

Αν η εκτόξευση γίνει κατά τη φορά της ταχύτητας v_1 απαιτείται

$$\Delta v_2 = v_{\delta 2} - v_2 = 9,5 - 6,2 = 3,3 km/s$$

και αντίστοιχη ενέργεια $\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (\Delta v_2)^2 = 70 \cdot (3,3 \cdot 10^3)^2 = 762,3 \cdot 10^6 J$

Σαφώς συμφέρει εκτόξευση στο **περίγειο**.

Η λύση του σχολικού

α) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη-σταθμός διατηρείται, δηλαδή $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\text{επομένως } -G \frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2} m v_1^2 = -G \frac{M_\Gamma m}{r_2} + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\text{ή } -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_1} + \frac{v_1^2}{2} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_2} + \frac{v_2^2}{2} \text{ άρα}$$

$$v_2 = \sqrt{2g_0 R_\Gamma^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + v_1^2} = 6,16 \times 10^3 m/s$$

β) Η ενέργεια E που πρέπει να προσφερθεί στη συσκευή ώστε να φτάσει στο άπειρο χωρίς κινητική ενέργεια, θα βρεθεί από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$E_{APX} + E = E_{TEA}$ (1) όπου E_{APX} , E_{TEA} η αρχική και τελική ενέργεια του συστήματος συσκευής - Γη. Επειδή κατά την περιφορά της συσκευής γύρω από τη Γη η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, η E_{APX} είναι ίδια για όλα τα σημεία της τροχιάς.

Σύμφωνα με την (1)

$$-G \frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2} m v_1^2 + E = 0 \text{ ή } E = \frac{g_0 R_\Gamma^2 m}{r_1} - \frac{m v_1^2}{2} = 3,7 \times 10^9 J$$

Βλέπουμε ένα τεράστιο και αχρείαστο ποσό ενέργειας! Δεν έχει ληφθεί υπόψη η ταχύτητα περιστροφής του σταθμού.

Ανδρέας Ριζόπουλος