

“Gli operatori di flusso e di circuitazione in fisica applicati ai campi elettrico e magnetico e le quattro equazioni di Maxwell”

In fisica con la parola campo si indica una porzione di spazio in ogni punto del quale sia misurabile una grandezza fisica. Il campo magnetico è indicato con $\vec{B}$ e il campo elettrico con $\vec{E}$.

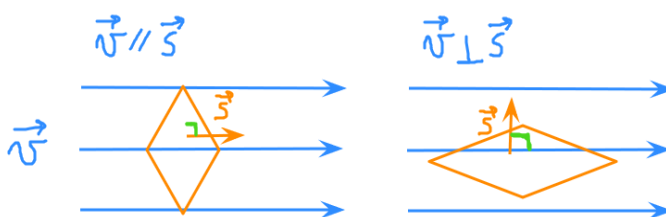
I concetti matematici principali per parlare di campo sono gli operatori flusso e circuitazione.

Operatore flusso

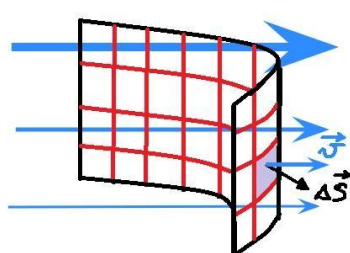
Consideriamo un campo vettoriale $\vec{v}$ uniforme (orizzontale) e una superficie orientata S (ricordando che una superficie orientata è una superficie alla quale viene attribuito il

vettore normale $\vec{s}$ perpendicolare alla superficie) allora flusso del campo attraverso la superficie è definito come il prodotto scalare $\vec{v}$ per $\vec{s}$, precisamente $\vec{v} \cdot \vec{s} = v s \cos \alpha$, dove α è l'angolo compreso tra i

vettori. Pertanto, il flusso è massimo quando i due vettori sono paralleli, ovvero quando il campo è perpendicolare alla superficie; mentre è nullo quando $\vec{v}$ e $\vec{s}$ sono perpendicolari tra loro, ciò accade quando il campo è parallelo alla superficie.



Passando ad un caso più generale dove il campo non è uniforme e la superficie non è piana è necessaria la notazione integrale come vedremo tra poco. Per fare ciò dividiamo



la superficie in piccoli quadratini di area Δs talmente piccoli da considerarli piani così che il campo possa considerarsi uniforme all'interno di ciascun quadratino. Per definizione il flusso del vettore $\vec{v}$ attraverso un singolo quadratino è il prodotto scalare tra i vettori $\vec{v}$ e $\Delta \vec{s}$:

$$\phi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \Delta \vec{s} = v \Delta s \cos \alpha$$

Dunque possiamo esprimere il flusso attraverso la superficie sommando tutti i contributi delle singole aree:

$$\phi(\vec{v}) = \sum_i (\vec{v}_i \cdot \Delta \vec{s}_i)$$

Se facciamo tendere Δs a zero il vettore si avvicina al limite differenziale $d\vec{s}$ e la definizione di flusso può essere espressa con un integrale di superficie:

$$\Phi(\vec{v}) := \int \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

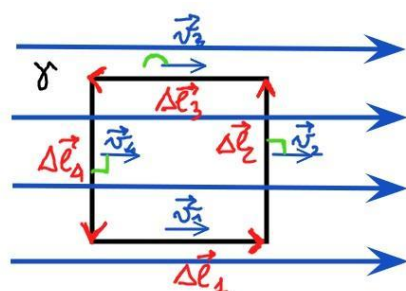
Pertanto, il flusso del campo è massimo quando le linee del campo sono parallele alla normale, ovvero quando il campo è perpendicolare alla superficie, mentre è nullo quando la normale è perpendicolare alle linee di campo.

Osservazioni sul concetto di flusso

Il flusso permette di descrivere quantitativamente la distribuzione dei vettori di un campo nello spazio. Se il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo, i vettori sono disposti in modo da attraversare la superficie da una parte all'altra. Se il flusso attraverso una superficie chiusa è positivo i vettori sono disposti come se uscissero da un punto interno alla superficie. Se il flusso attraverso una superficie chiusa è negativo i vettori sono disposti come se entrassero in un punto interno alla superficie.

Circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa

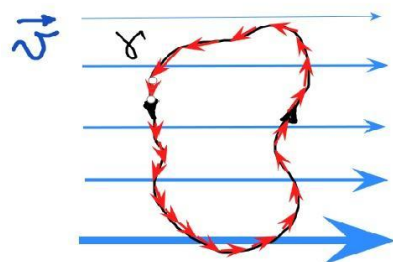
Per definire la circuitazione serve un campo vettoriale e una linea chiusa γ , la circuitazione è l'integrale del campo lungo la linea chiusa. Per comprendere meglio, introduciamo il concetto ipotizzando che il campo $\vec{v}$ sia uniforme e che la linea chiusa sia un quadrato come in figura.



Fissiamo un verso di percorrenza (antiorario) e dividiamo la curva in quattro parti, ovvero i lati del quadrato che indiciamo con $\Delta \vec{l}_1$, $\Delta \vec{l}_2$, $\Delta \vec{l}_3$ e $\Delta \vec{l}_4$. Per ciascun tratto calcoliamo la somma dei prodotti scalari nel seguente modo:

$$\Gamma_{\gamma}(\vec{v}) = \vec{v}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{v}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 + \vec{v}_3 \cdot \Delta \vec{l}_3 + \vec{v}_4 \cdot \Delta \vec{l}_4$$

Poiché il campo è uniforme per tutti i tratti e i moduli dei quattro vettori $\Delta \vec{l}$ sono tutti uguali, considerando gli angoli che essi formano possiamo concludere che la circuitazione è in questo caso zero. Abbiamo capito che per calcolare la circuitazione dobbiamo sommare i prodotti scalari. Nel caso generale il campo non è uniforme e la linea chiusa γ è una linea chiusa qualsiasi. Anche in questo caso fissiamo un verso di percorrenza (generalmente antiorario) e dividiamo la curva in tante parti $\Delta \vec{l}$, in modo che ciascun tratto possa essere considerato rettilineo e in essi il campo uniforme. Dunque



calcoliamo la somma dei prodotti scalari tra $\vec{v}$ e i vari tratti $\Delta \vec{l}$, ovvero $\sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$. Per calcolare la circuitazione facciamo il limite di questa somma per Δl che tende a zero che significa considerare dei tratti infinitesimi. Questo limite è per definizione l'integrale sulla linea chiusa γ del campo $\vec{v}$ che si

indica con questo simbolo:

$$\Gamma_V(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Concludiamo dicendo che la circuitazione ci mostra il comportamento medio del campo lungo un percorso chiuso e che sarà quindi diversa a seconda delle caratteristiche del campo. Ad esempio se le linee del campo sono radiali come nel caso del campo elettrico generato da una carica puntiforme oppure circolari come nel caso di un campo magnetico generato da un filo percorso da corrente. Infine, se la circuitazione è nulla allora il campo è conservativo.

Applicazione del concetto di flusso al campo elettrico e magnetico

Ricordando la definizione di campo $\vec{E}$ in un punto P dello spazio è definito come il rapporto tra la forza elettrostatica $\vec{F}$ che agisce su una carica di prova positiva q_0 posta nel punto P e la carica stessa: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$, con unità di misura N/C. Il campo elettrico in un punto è quindi un vettore che ha direzione e verso uguali alla forza che agisce su una carica di prova positiva posta in P . Si dimostra che il campo elettrico di una carica Q è indipendente dalla carica di prova. Pertanto in ogni punto dello spazio attorno a una carica è definito un vettore campo elettrico. L'insieme di questi vettori forma un campo vettoriale, che contiene l'informazione relativa alla carica che lo ha generato. Le caratteristiche della forza elettrostatica si rispecchiano nelle proprietà del campo elettrico. Fra queste la più importante è stata formulata da *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) mediante il flusso del campo elettrico attraverso una superficie: $\Phi(\vec{E})$. Consideriamo una qualsiasi superficie chiusa S , detta superficie gaussiana, immersa in un campo elettrico. Come dimostrato tale flusso può essere espresso nel seguente modo:

$$\Phi(\vec{E}) = \sum_i (\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è legato alla carica totale racchiusa nella superficie. Questa relazione è espressa dal *teorema di Gauss*. Il flusso $\Phi(\vec{E})$ del campo elettrico attraverso una superficie chiusa (o gaussiana) è uguale al rapporto fra la carica totale Q racchiusa nella superficie e la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 .

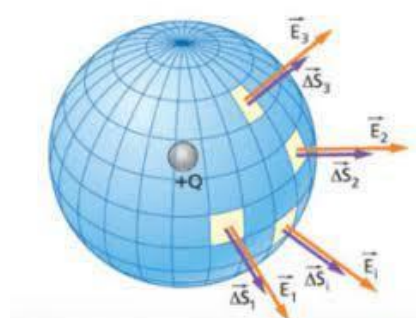
Sapendo che il campo elettrico generato da una carica ha modulo $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, e che la

superficie di una sfera è $4\pi r^2$, sostituendo otteniamo

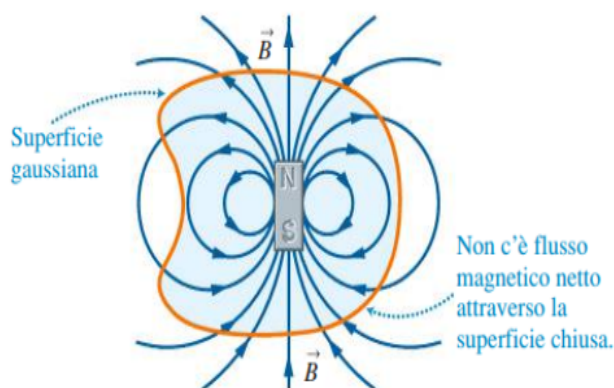
$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} . \quad \text{Possiamo concludere}$$

scrivendo: $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$. Si dimostra con questo risultato

che il flusso del campo elettrico non dipende dalla forma e dalle dimensioni della superficie gaussiana scelta, ma solo dalla carica totale racchiusa al suo interno, pertanto se non



ci sono cariche il flusso è nullo. Inoltre, ricordiamo il valore della costante dielettrica del vuoto come $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C} \frac{2}{\text{Nm}^2}$. L'unità di misura del flusso magnetico elettrico è $\frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m}^2}$.



È possibile enunciare una *legge di Gauss* anche per il campo magnetico $\vec{B}$. Poiché non esistono cariche magnetiche isolate (monopoli magnetici) da cui possono originarsi linee di campo che si estendono fino all'infinito, il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre nulla. In conclusione: $\Phi(\vec{B}) = 0$

L'unità di misura del flusso magnetico è il *Weber* (Wb) definito come il prodotto di 1 *Tesla* per *metro*.

Legge di FARADY - NEUMANN

Prima di introdurre il concetto di circuitazione per il campo elettrico e magnetico ripercorriamo una delle esperienze del noto scienziato *Faraday*, che intorno al 1830 scoprì il fenomeno dell'induzione elettromagnetica e intuì che la forza elettromotrice indotta nasce da una variazione del flusso magnetico. Consideriamo il caso particolare una barra che si muove in un tratto x_0 attraverso un campo magnetico fra gli istanti $t = 0$ e t_0 . In un istante di tempo successivo, la barretta si trova a una distanza x maggiore. La velocità della barretta ha modulo $v = \frac{x-x_0}{t-t_0}$ e sostituendo questa espressione nell'equazione $\epsilon = vBL$ si ottiene:

$$\epsilon = \frac{x-x_0}{t-t_0} BL = \frac{xL-x_0L}{t-t_0} B,$$

dove x_0L è l'area spazzata dalla barretta che si muove di un tratto x_0 (analogamente per il tratto x). Dunque, in termini di area ricaviamo che

$$\epsilon = \frac{A-A_0}{t-t_0} B = \frac{BA-BA_0}{t-t_0}.$$

Quindi la spira è piana, il vettore superficie è parallelo al campo $\vec{B}$ e il coseno dell'angolo ha valore 1. Possiamo quindi scrivere la forza elettromotrice usando la definizione di flusso:

$$\varepsilon = \frac{\Phi(\vec{B}) - \Phi(\vec{B}_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

In conclusione il valore della forza elettromotrice fem è rappresentato dalla rapidità con cui il campo magnetico varia nel tempo.

Questo risultato ha valore generico e prende il nome di LEGGE DI FARADY-NEUMANN:

La fem media indotta in un circuito è $\varepsilon = - \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$

Dove il segno meno indica che la fem indotta genera una corrente che si oppone alla variazione del flusso magnetico.

Applicazione del concetto di circuitazione al campo elettrico e magnetico

Ricordiamo che la fem è uguale al rapporto fra il lavoro fatto dalla forza elettrica $\vec{F}_e$ per spostare una carica q lungo il circuito e la carica stessa; e che la forza è legata al campo elettrico dalla relazione $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Poiché $\vec{E}$, in generale, non è costante lungo il circuito, questo lavoro non può essere calcolato moltiplicando l'intensità della forza per la lunghezza del circuito. Tuttavia, possiamo calcolare il lavoro compiuto da un campo elettrico per spostare una carica q lungo un percorso chiuso γ e dividendo il percorso in spostamenti parziali otteniamo:

$$L = \sum (\vec{F}_e \cdot \Delta\vec{l}) = \sum (q\vec{E} \cdot \Delta\vec{l})$$

Se consideriamo gli spostamenti infinitesimi $d\vec{l}$ la somma diventa una circuitazione

$$L = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dove abbiamo potuto portare fuori dal segno di integrale q perché costante.

La fem è il rapporto tra L e q ed è quindi la *circuitazione del campo elettrico* lungo la curva γ

$$\varepsilon = \frac{L}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Al secondo membro della legge di LEGGE DI FARADY-NEUMANN abbiamo, a meno del segno, il rapporto $\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$ ma se il flusso non varia uniformemente dobbiamo considerare la variazione infinitesimale passando al limite con Δt che tende a zero:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Phi(\vec{B}(t)) - \Phi(\vec{B}(t_0))}{t - t_0} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \text{ ovvero il concetto di } \textit{derivata} \text{ applicato al flusso}$$

$\Phi(\vec{B})$. In conclusione possiamo enunciare la *legge di Faraday-Lenz*:

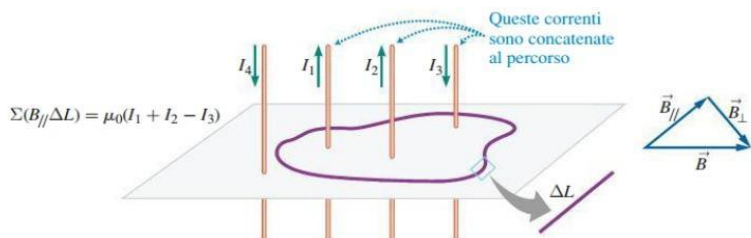
La circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso è uguale alla derivata temporale, cambiata di segno, del flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal percorso:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Ricordiamo inoltre che *legge di Ampere* lega il campo magnetico lungo un percorso chiuso alla corrente elettrica concatenata a tale percorso:

$$\sum (B_{\parallel} \Delta L) = \mu_0 I(\text{concatenata})$$

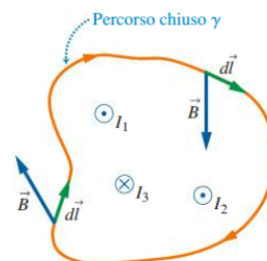
Dove con $B_{\parallel}$ è la componente del campo magnetico parallela ai segmenti Δl della spira, $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} Tm/A$ indica la costante di permeabilità magnetica nel vuoto, $I(\text{concatenata})$ sono le correnti concatenate nella spira, come rappresentato nella seguente figura:



Ricordiamo che la corrente concatenata ha un segno algebrico dato dal verso di percorrenza, e che I_4 non essendo concatenata non dà alcun contributo.

Tale espressione può essere generalizzata al caso di una curva chiusa qualsiasi suddivisa in segmenti infinitesimi di orientati, pertanto il prodotto scalare del vettore $\vec{B}$ e del vettore $d\vec{l}$ è uguale al prodotto della componente di $\vec{B}$ parallela a $d\vec{l}$ per la lunghezza $d\vec{l}$ del segmento infinitesimo.

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\parallel} dl$$



Come abbiamo già esposto precedentemente la somma di tutti questi componenti è per definizione la circuitazione, quindi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I(\text{concatenata})$$

Che esprime l'espressione generale della legge di Ampere.

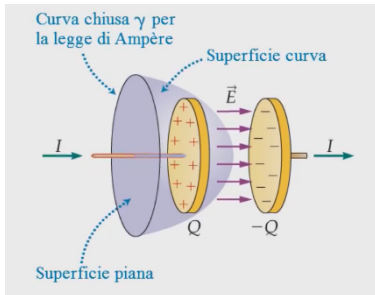
Osserviamo che la legge di Ampere e la legge di Faraday-Lenz:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I(\text{concatenata})$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

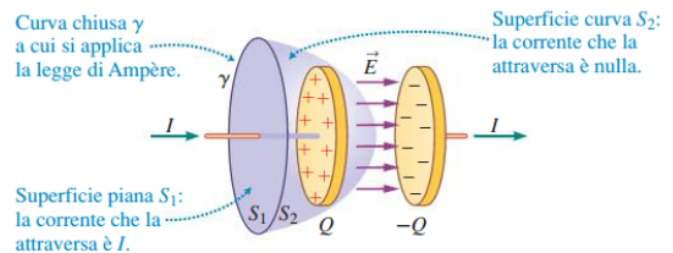
Al primo membro presentano una somiglianza, entrambe contengono una circuitazione, il secondo membro è decisamente diverso. Mentre secondo la legge di Faraday-Lenz, una variazione del campo magnetico genera un campo elettrico, a giudicare dalla legge di Ampere sembra che solo una corrente possa produrre un campo magnetico. Maxwell da

questa osservazione ipotizzò una perfetta analogia ovvero che anche la variazione del campo elettrico generasse un campo magnetico. La legge di Ampere in realtà ha validità solo se i campi non variano nel tempo.



Se applichiamo la legge di Ampere per un condensatore a facce piane parallele, come in figura, lungo la curva chiusa γ può essere vista come il bordo di una superficie piana tagliata da filo conduttore ma anche di una superficie curva che racchiude una delle armature del condensatore. La corrente che attraversa la superficie piana è I mentre quella che attraversa la superficie curva è nulla quindi secondo la legge

di Ampère la circuitazione del campo magnetico $\vec{B}$ lungo la curva dovrebbe valere sia $\mu_0 I$ sia 0 il che è una contraddizione. Il problema fu risolto da Maxwell e ripercorriamo il suo ragionamento applicato al condensatore della figura sottostante.



Quando il condensatore si carica, il campo elettrico fra le sue armature e il flusso elettrico attraversa la superficie aumentano. Calcoliamo la variazione temporale del flusso del campo elettrico.

Il campo è uniforme e diverso da zero solo su una armatura racchiusa dalla superficie di curva S_2 , il flusso quindi è dato da $\phi(\vec{E}) = EA$. Ricordando che, se d è la distanza tra le armature del condensatore, la capacità del condensatore è $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ e la differenza di potenziale è data da $V = Ed$. Quindi la carica sul condensatore è $Q = CV = \epsilon_0 \frac{A}{d} Ed = \epsilon_0 AE$, pertanto possiamo scrivere $\epsilon_0 \phi(\vec{E}) = Q$.

Scriviamo la variazione temporale del primo e del secondo membro e otteniamo:

$$\epsilon_0 \frac{\Delta \phi(\vec{E})}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

E sapendo che $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ è la corrente I nel filo conduttore collegato al condensatore, applicando il concetto di derivata quando l'intervallo di tempo Δt tende a zero otteniamo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi(\vec{E})}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(\vec{E}(t)) - \phi(\vec{E}(t_0))}{t - t_0} = \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{otteniamo}$$

$$\epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Maxwell suggerì di chiamare corrente di spostamento I_s la variazione del flusso del campo elettrico:

$$\epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = I_s$$

Questa corrente di spostamento Maxwell la inserì come addendo alla legge di Ampere.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_s)$$

La corrente I che scorre nel filo conduttore continua a fluire attraverso lo spazio compreso tra le due armature del condensatore generando un campo indotto, uguale in intensità, direzione e verso al campo esterno.

La legge di Ampere può essere riscritta nel seguente modo ed ha validità generale.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}.$$

Assume così il nome di legge di Ampère-Maxwell valida sia nelle situazioni statiche sia nelle situazioni dinamiche. Appare naturale interpretare il campo elettrico e il campo magnetico come manifestazioni diverse di un'unica entità fisica: il *campo elettromagnetico*. Infatti, un campo elettrico viene generato ogni qualvolta si è in presenza di un campo di induzione magnetica variabile nel tempo. I campi si possono definire conservativi se il lavoro generalizzato su una linea chiusa è nullo. Utilizzando il concetto di circuitazione la legge di Ampere-Maxwell è sufficiente a garantire che il campo magnetico non sia conservativo perché dipende implicitamente dal tempo attraverso la corrente elettrica. La circuitazione del campo magnetico è in generale diversa da zero e risulta proporzionale alla somma algebrica delle correnti che attraversano una qualsiasi superficie appoggiata sulla linea chiusa.

Riassumiamo schematicamente le quattro equazioni di Maxwell

Prima equazione o teorema di Gauss per il campo elettrico:

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende dalla carica contenuta pertanto le cariche elettriche sono sorgenti di campi elettrici.

Seconda equazione o teorema di Gauss per il campo magnetico:

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo. Non esistono cariche magnetiche isolate.

Terza equazione di Maxwell o legge di Faraday-Lenz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La circuitazione del campo elettrico dipende dalla variazione del flusso del campo magnetico e quindi il campo magnetico genera un campo elettrico.

Quarta equazione di Maxwell o legge di Ampere-Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

La circuitazione del campo magnetico dipende dalla variazione del flusso del campo elettrico e dalla corrente, quindi una corrente genera un campo magnetico e un campo elettrico variabile genera un campo magnetico.

Prof. Alessandro Adami