

ENSAIT Physique I 1999

Problème 1

1.1 Le potentiel électrostatique créé par les deux charges ponctuelles au point P est :

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

1.2 La surface équipotentielle de potentiel nul est telle que : $V(P) = 0$ i.e. $\lambda r = r'$. Dans un système de coordonnées cartésiennes d'origine A l'équation précédente devient : $\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = (x - d)^2 + y^2 + z^2$

d'où après simplification : $\left(x - \frac{d}{1 - \lambda^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{\lambda d}{1 - \lambda^2}\right)^2$. On reconnaît alors l'équation d'une sphère

(S) de centre O de coordonnées $\left(\frac{d}{1 - \lambda^2}, 0, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{\lambda d}{1 - \lambda^2}$. On a donc $a = \overline{AO} = \frac{d}{1 - \lambda^2}$ et $R = \lambda a$.

1.3 Par définition le champ électrostatique $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles : le vecteur $\vec{E}$ est donc perpendiculaire à la sphère (S). De plus $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, donc $\vec{E}$ est dirigé des forts potentiels vers les faibles potentiels. Comme le point B (potentiel négatif) est à l'intérieur de la sphère (S) et le point A (potentiel positif) à l'extérieur, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers l'intérieur de la sphère (S). Enfin le champ

électrostatique créé par deux charges ponctuelles est : $\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} - \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}'$. La norme de $\vec{E}$ sur la

surface (S) est donc $\|\vec{E}(P)\| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \lambda^2 r^3} \|\lambda^2 \vec{r} - \vec{r}'\|$. Or

$$\|\lambda^2 \vec{r} - \vec{r}'\| = (\lambda^2 - 1) \left(\left(x - \frac{d}{1 - \lambda^2}\right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} = (\lambda^2 - 1) \frac{\lambda d}{1 - \lambda^2} = \lambda d \quad \text{d'où} \quad \|\vec{E}(P)\| = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 \lambda r^3}.$$

En conclusion $\vec{E}$ est perpendiculaire à la sphère (S) dirigé vers l'intérieur de celle-ci et de norme

$$\|\vec{E}(P)\| = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 \lambda r^3}. \text{ A.N. } E = 35,2 \text{ Vm}^{-1}.$$

1.4 D'après la question 1.2 $\lambda = \frac{R}{a}$ et $d = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} R = \frac{a^2 - R^2}{a}$ d'où $\|\vec{E}(P)\| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{a^2 - R^2}{R}$.

1.5 Par définition l'énergie électrostatique d'interaction de deux particules ponctuelles chargées est

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad \text{et donc ici on a} \quad W = \frac{-\lambda q^2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

1.6 La surface équipotentielle reste un cercle. On a alors $l = \overline{AL} = \overline{AO} + \overline{OL} = a - R = a(1 - \lambda)$ d'où

$$\lambda = \frac{a - l}{a}, \quad R = a - l \quad \text{et} \quad d = l(1 + \lambda). \text{ Quand le point } O \text{ s'éloigne de } A, \quad a \longrightarrow \infty, \quad \lambda \longrightarrow 1, \quad R \longrightarrow \infty,$$

$d \longrightarrow 2l$ et $\|E(P)\| \longrightarrow \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. On se retrouve dans le cas d'un dipôle électrostatique : la surface de potentiel nul est donc bien le plan médiateur et on a bien $\|E(P)\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ où $p = qd$ est le moment dipolaire.

Problème 2

2.1 Le courant I qui circule dans le circuit est
$$I = \frac{\sqrt{2}E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad |I| = \frac{\sqrt{2}EjC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

La valeur maximale de I est obtenue quand $\frac{dI}{dC} = 0$ i.e. pour $C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$. On a alors $I_0 = \frac{\sqrt{2}E}{R}$. Les deux valeurs de C telles que $I(C) = I_0 / \sqrt{2}$ sont : $C_1 = \frac{1}{L\omega^2 + \omega R}$, $C_2 = \frac{1}{L\omega^2 - \omega R}$. Si C_1 et C_2 sont proches alors ceci revient à dire que $L\omega^2$ est très grand devant $R\omega$ d'où $C_1 = \frac{1}{L\omega^2} \left(1 - \frac{R}{L\omega}\right) = C_0 \left(1 - \frac{R}{L\omega}\right)$ et $C_2 = \frac{1}{L\omega^2} \left(1 + \frac{R}{L\omega}\right) = C_0 \left(1 + \frac{R}{L\omega}\right)$. C_1 et C_2 sont donc bien équidistantes de C_0 .

2.2 Il est plus avantageux de déterminer C_1 et C_2 que C_0 à cause des incertitudes de mesure. En effet comme C_0 correspond à un maximum sa valeur est mal définie ; par contre la valeur de I_0 , et donc celle de $I_0 / \sqrt{2}$, est bien définie. D'où une bonne détermination de C_1 et C_2 .

2.3 Par définition le facteur de qualité est $Q = \frac{C_0}{C_2 - C_1}$ d'où $Q = \frac{C_2 + C_1}{2(C_2 - C_1)}$. A.N. $Q=12,5$

2.4 Comme $C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$ et $Q = \frac{2R}{L\omega}$ on a $L = \frac{1}{(C_2 + C_1)2\pi^2 f^2}$ et $R = \frac{4(C_2 - C_1)}{(C_2 + C_1)^2 \pi f}$. A.N. $L=2,02.10^{-5}$ H et $R=2,04 \Omega$.

2.5 Il suffit de remplacer R par $R + R_A$. L reste inchangée et R devient $R = \frac{4(C_2 - C_1)}{(C_2 + C_1)^2 \pi f} - R_A$ d'où $R=1,94 \Omega$.