ENSAIT Physique I 1999

Problème 1

1.1 Le potentiel électrostatique créé par les deux charges ponctuelles au point *P* est : $V(P)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$.

1.2 La surface équipotentielle de potentiel nul est telle que : $V(P)=0$ *i.e.* $\lambda r=r'$. Dans un système de coordonnées cartésiennes d'origine *A* l'équation précédente devient : $\lambda^2\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x-d\right)^2+y^2+z^2$ d'où après simplification : $\left(x-\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{\lambda d}{1-\lambda^2}\right)^2$. On reconnaît alors l'équation d'une sphère (*S*) de centre *O* de coordonnées $\left(\frac{d}{1-\lambda^2},0,0\right)$ et de rayon $R=\frac{\lambda d}{1-\lambda^2}$. On a donc $a=\overline{AO}=\frac{d}{1-\lambda^2}$ et $R=\lambda a$.

1.3 Par définition le champ électrostatique $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles : le vecteur $\vec{E}$ est donc perpendiculaire à la sphère (*S*). De plus $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)$, donc $\vec{E}$ est dirigé des forts potentiels vers les faibles potentiels. Comme le point *B* (potentiel négatif) est à l'intérieur de la sphère (*S*) et le point *A* (potentiel positif) à l'extérieur, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers l'intérieur de la sphère (*S*). Enfin le champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles est : $\vec{E}(P)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}-\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\vec{r}'$. La norme de $\vec{E}$ sur la surface (*S*) est donc $\left\|\vec{E}(P)\right\|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\lambda^2 r^3}\left\|\lambda^2\vec{r}-\vec{r}'\right\|$. Or

$$\left\|\lambda^2\vec{r}-\vec{r}'\right\|=\left(\lambda^2-1\right)\left(\left(x-\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2+z^2\right)^{1/2}=\left(\lambda^2-1\right)\frac{\lambda d}{1-\lambda^2}=\lambda d$$

d'où $\left\|\vec{E}(P)\right\|=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0\lambda r^3}$.

En conclusion $\vec{E}$ est perpendiculaire à la sphère (S) dirigé vers l'intérieur de celle-ci et de norme $\left\|\vec{E}(P)\right\|=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0\lambda r^3}$. A.N. E= 35,2 Vm^{-1}.

1.4 D'après la question 1.2 $\lambda=\frac{R}{a}$ et $d=\frac{1-\lambda^2}{\lambda}R=\frac{a^2-R^2}{a}$ d'où $\left\|\vec{E}(P)\right\|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{a^2-R^2}{R}$.

1.5 Par définition l'énergie électrostatique d'interaction de deux particules ponctuelles chargées est $W=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ et donc ici on a $W=\frac{-\lambda q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$.

1.6 La surface équipotentielle reste un cercle. On a alors $l=\overline{AL}=\overline{AO}+\overline{OL}=a-R=a(1-\lambda)$ d'où $\lambda=\frac{a-l}{a}$, $R=a-l$ et $d=l(1+\lambda)$. Quand le point O s'éloigne de A, $a\longrightarrow\infty$, $\lambda\longrightarrow 1$, $R\longrightarrow\infty$,

$d \longrightarrow 2l$ et $\left\|\vec{E}(P)\right\| \longrightarrow \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. On se retrouve dans le cas d'un dipôle électrostatique : la surface de potentiel nul est donc bien le plan médiateur et on a bien $\left\|\vec{E}(P)\right\| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ où $p = qd$ est le moment dipolaire.

Problème 2

2.1 Le courant I qui circule dans le circuit est $\underline{I} = \frac{\sqrt{2}E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$ d'où $|\underline{I}| = \frac{\sqrt{2}EjC\omega}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2}}$. La valeur maximale de I est obtenue quand $\frac{dI}{dC} = 0$ i.e. pour $C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$. On a alors $I_0 = \frac{\sqrt{2}E}{R}$. Les deux valeurs de C telles que $I(C) = I_0/\sqrt{2}$ sont : $C_1 = \frac{1}{L\omega^2 + \omega R}$, $C_2 = \frac{1}{L\omega^2 - \omega R}$. Si C_1 et C_2 sont proches alors ceci revient à dire que $L\omega^2$ est très grand devant $R\omega$ d'où $C_1 = \frac{1}{L\omega^2}\left(1 - \frac{R}{L\omega}\right) = C_0\left(1 - \frac{R}{L\omega}\right)$ et $C_2 = \frac{1}{L\omega^2}\left(1 + \frac{R}{L\omega}\right) = C_0\left(1 + \frac{R}{L\omega}\right)$. C_1 et C_2 sont donc bien équidistantes de C_0.

2.2 Il est plus avantageux de déterminer C_1 et C_2 que C_0 à cause des incertitudes de mesure. En effet comme C_0 correspond à un maximum sa valeur est mal définie ; par contre la valeur de I_0, et donc celle de $I_0/\sqrt{2}$, est bien définie. D'où une bonne détermination de C_1 et C_2.

2.3 Par définition le facteur de qualité est $Q = \frac{C_0}{C_2 - C_1}$ d'où $Q = \frac{C_2 + C_1}{2(C_2 - C_1)}$. A.N. Q=12,5

2.4 Comme $C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$ et $Q = \frac{2R}{L\omega}$ on a $L = \frac{1}{(C_2 + C_1)2\pi^2 f^2}$ et $R = \frac{4(C_2 - C_1)}{(C_2 + C_1)^2 \pi f}$. A.N. L=2,02.10^{-5} H et R=2,04 Ω.

2.5 Il suffit de remplacer R par $R + R_A$. L reste inchangée et R devient $R = \frac{4(C_2 - C_1)}{(C_2 + C_1)^2 \pi f} - R_A$ d'où R=1,94 Ω.