

12.SINIF MATEMATİK DERS PLANI

BÖLÜM I

| | | | |
|-------------------|------------------|-------|--------------|
| Dersin Adı | Matematik | Tarih | 8-19/09/2025 |
| Sınıf | 12 | Süre | 8 ders saati |
| Alt Öğrenme Alanı | SAYILAR VE CEBİR | | |
| Konu | Üstel Fonksiyon | | |

BÖLÜM II

| | |
|--------------------------|--|
| Kazanım | 12.1.1.1. Üstel fonksiyonu açıklar. |
| Kazanım Açıklaması | <i>a) Üstel fonksiyonlara neden ihtiyaç duyulduğu vurgulanmalıdır.</i> <i>b) Üslü ifadeler ve bunlarla yapılan işlemlerin özellikleri hatırlatılır.</i> <i>c) Üstel fonksiyonların bire bir ve örten olduğu grafik yardımıyla gösterilir.</i> <i>ç) a nın aldığı değerlere göre $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin değişimini incelemek için bilgi ve iletişim teknolojilerinden de yararlanır.</i> |
| Yöntem ve Teknikler | Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası |
| Kullanılan Araç-Gereçler | Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel |

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

ÜSTEL FONKSİYON

Üstel Fonksiyon ve Üstel Fonksiyonun Grafiği

Üstel fonksiyonlar başta fizik, kimya, biyoloji, astronomi vb. doğa bilimleri olmak üzere birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Bunun yanında günlük yaşamın değişik iş dalları olan sigortacılık, muhasebe, bankacılık ve finans gibi sektörlerde de üstel fonksiyonların uygulama alanı bulunmaktadır. Bir bakteri kültüründe bakterilerin çoğalmasını araştıran bir biyolog, dünya nüfusundaki artışı inceleyen bir sosyolog, bir çözeltinin pH değerini ölçüp onun asidik veya bazik olduğunu bulmak isteyen bir kimyager, ses düzeyi birimi desibel (dB) olan ses şiddetini ölçmek isteyen bir fizikçi; çalışmalarını yürütürken üstel fonksiyonları kullanır. Ayrıca özel bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketi sonucu oluşan maksimum genlik ile depremin büyüklüğü arasındaki ilişkiyi inceleyen bir jeolog, parasal konularda çalışan bir ekonomist ve okyanus coğrafyası (oşinografi) alanında plajın eğimi ile üzerindeki kum taneciklerinin boyutları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak isteyen bir araştırmacı da çalışmalarını modellerken üstel fonksiyonlardan yararlanmaktadır.

HATIRLATMA

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane x gerçek sayısının çarpımı

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ tane}} = x^n$$

biçiminde ifade edilir. Burada x^n ifadesine, tabanı x ve üssü n olan **üslü ifade** denir.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere üslü ifadelerle ilgili aşağıdaki özellikler vardır.

★ $x^1 = x$

★ $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$

★ $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ve $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

★ $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

★ $x \neq 0$ olmak üzere $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

★ $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

★ $x > 0$ olmak üzere $(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m \cdot n}$

★ $y \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

★ $(-1)^{2n} = 1$ ve $(-1)^{2n+1} = -1$

★ $x \geq 0$ olmak üzere $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

★ $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \cdot x^m \mp b \cdot x^m = (a \mp b) \cdot x^m$

★ $x \neq 0$ ve $|x| \neq 1$ olmak üzere $x^m = x^n \Rightarrow m = n$

ÖRNEK |||

$3^5 \cdot 9^2 \cdot 27^{-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$3^5 \cdot 9^2 \cdot 27^{-2} = 3^5 \cdot (3^2)^2 \cdot (3^3)^{-2} = 3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^{-6} = 3^3 = 27 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK |||

$\frac{3^{2015} + 3^{2016}}{3^{2017} - 3^{2018}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned} \frac{3^{2015} + 3^{2016}}{3^{2017} - 3^{2018}} &= \frac{3^{2015} + 3^{2015} \cdot 3^1}{3^{2015} \cdot 3^2 - 3^{2015} \cdot 3^3} \\ &= \frac{\cancel{3^{2015}} \cdot (1 + 3^1)}{\cancel{3^{2015}} \cdot (3^2 - 3^3)} \\ &= \frac{1 + 3}{9 - 27} \\ &= -\frac{2}{9} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK |||

$2^x = a$, $5^x = b$ ve $7^x = c$ olduğuna göre 140^x in a , b ve c türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

140 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} 140^x &= (2^2 \cdot 5 \cdot 7)^x \\ &= (2^x)^2 \cdot 5^x \cdot 7^x \\ &= a^2 \cdot b \cdot c \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK |||

$3^m = \frac{1}{2}$ olduğuna göre 3^{1-2m} ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$3^{1-2m} = \frac{3^1}{3^{2m}} = \frac{3}{(3^m)^2} = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK |||

$28^x = 7^{x+1}$ olduğuna göre 2^{2x-1} ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$28^x = 7^{x+1}$$

$$\cancel{7^x} \cdot 4^x = \cancel{7^x} \cdot 7^1$$

$$4^x = 7 \text{ olur. Bu durumda } 2^{2x-1} = \frac{2^{2x}}{2^1} = \frac{4^x}{2} = \frac{7}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK |||

$\frac{a^3 + a^{13} + a^{23}}{a^{-3} + a^7 + a^{17}}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$\frac{a^3 + a^{13} + a^{23}}{a^{-3} + a^7 + a^{17}}$ ifadesinin payı a^3 , paydası a^{-3} parantezine alınacak olursa

$$\frac{a^3 \cdot (1 + a^{10} + a^{20})}{a^{-3} \cdot (1 + a^{10} + a^{20})} = a^{3+3} = a^6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK |||

$\frac{(-2^4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5}{(-2^{-2})^3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$$\begin{aligned}\frac{(-2^4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5}{(-2^{-2})^3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}} &= \frac{(-2^4) \cdot (-2^{-5})}{(-2^{-6}) \cdot (-2^{-3})^{-2}} \\ &= \frac{2^{4-5}}{(-2^{-6}) \cdot 2^6} \\ &= \frac{2^{-1}}{-2^0} \\ &= \frac{1}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna, tabanı “a” olan üstel fonksiyon denir.

ÖRNEK |||

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = (-3)^{-x}$

ç) $k(x) = 1^x$

d) $s(x) = 2^{-x}$

e) $t(x) = x^5 + 5^x$

ÇÖZÜM |||

Bir fonksiyonun üstel fonksiyon olabilmesi için tabanının 1 den farklı bir pozitif gerçektek sayı olması gerekmektedir. Verilen fonksiyonlardan $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $s(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları bu koşulu sağladığından üstel fonksiyondur.

$h(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının tabanı 1 den farklı pozitif gerçektek sayılar olmadığından üstel fonksiyon değildir. $t(x)$ fonksiyonu ise bir polinom fonksiyon ile üstel fonksiyonun toplamı biçiminde olduğundan üstel fonksiyon değildir.

ÖRNEK |||

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = (-3)^{-x}$

ç) $k(x) = 1^x$

d) $s(x) = 2^{-x}$

e) $t(x) = x^5 + 5^x$

ÇÖZÜM |||

Bir fonksiyonun üstel fonksiyon olabilmesi için tabanının 1 den farklı bir pozitif gerçektek sayı olması gerekmektedir. Verilen fonksiyonlardan $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $s(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları bu koşulu sağladığından üstel fonksiyondur.

$h(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının tabanı 1 den farklı pozitif gerçektek sayılar olmadığından üstel fonksiyon değildir. $t(x)$ fonksiyonu ise bir polinom fonksiyon ile üstel fonksiyonun toplamı biçiminde olduğundan üstel fonksiyon değildir.

ÖRNEK |||

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = (5m - 10)^x$ fonksiyonu, bir üstel fonksiyon olduğuna göre m nin en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM |||

$f(x)$ bir üstel fonksiyon olduğu için üstel fonksiyonun tabanı 1 den farklı bir pozitif gerçektek sayı olmalıdır. Buna göre $5m - 10 > 0$ ve $5m - 10 \neq 1$ olur.

$$\begin{aligned} 5m - 10 > 0 &\Rightarrow 5m > 10 \\ &\Rightarrow m > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5m - 10 \neq 1 &\Rightarrow 5m \neq 11 \\ &\Rightarrow m \neq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

Bu durumda m nin en geniş değer aralığı $(2, \infty) - \left\{\frac{11}{5}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 2^x$ fonksiyonunda x e bazı değerler verilerek bir tablo oluşturulur.

$$x = -2 \text{ için } f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$x = -1 \text{ için } f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ için } f(0) = 2^0 = 1$$

$$x = 1 \text{ için } f(1) = 2^1 = 2$$

$$x = 2 \text{ için } f(2) = 2^2 = 4$$

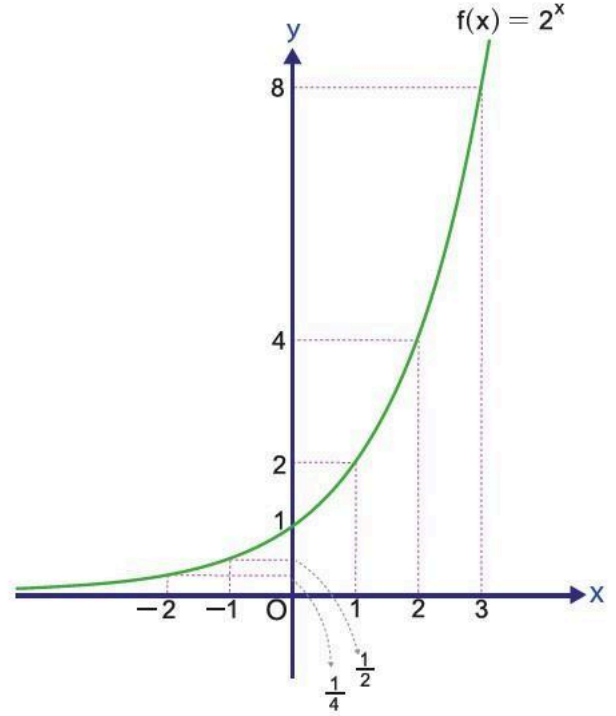
$$x = 3 \text{ için } f(3) = 2^3 = 8$$

| | | | | | | | | |
|--------------|-----|---------------|---------------|---|---|---|---|-----|
| x | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| $f(x) = 2^x$ | ... | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | ... |

O hâlde $f(x) = 2^x$ fonksiyonu,

$$\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)$$

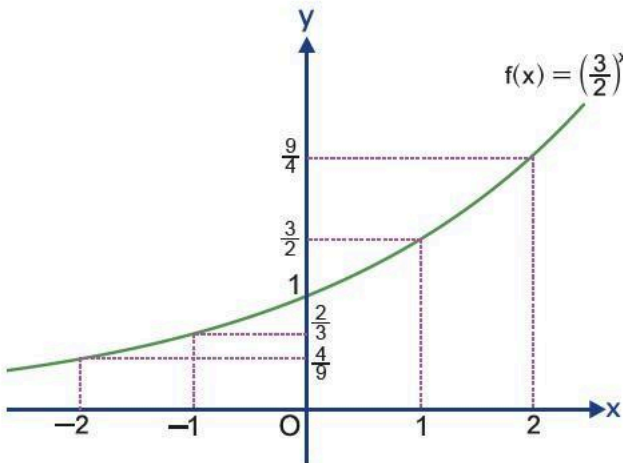
noktalarından geçmektedir. Bu noktalar koordinat sisteminde işaretlenerek birleştirildiğinde grafik şekildedeki gibi elde edilir.

**ÖRNEK**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve bu fonksiyonun bire bir ve örten olma durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

| | | | | | | | |
|-------------------------------------|-----|---------------|---------------|---|---------------|---------------|-----|
| x | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ... |
| $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ | ... | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | ... |



- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ için $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} \neq \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonu bire birdir.
- $\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ eşitliğini sağlayan en az bir tane $x \in \mathbb{R}$ değeri bulunduğu için $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonu örten dir.

BÖLÜM IV**Ölçme ve Değerlendirme**

1 $12^x = 3^{x+1}$ olduğuna göre 2^{4x} ifadesinin değerini bulunuz.

2 $3^m = \frac{1}{4}$ olduğuna göre 3^{2-3m} ifadesinin değerini bulunuz.

3 $\frac{2^{88} + 2^{89}}{2^{90} - 2^{89}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

4 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^{x+2} - 1$ olduğuna göre $f(1)$ ve $f(-3)$ değerlerini bulunuz.

5 Aşağıdaki üstel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

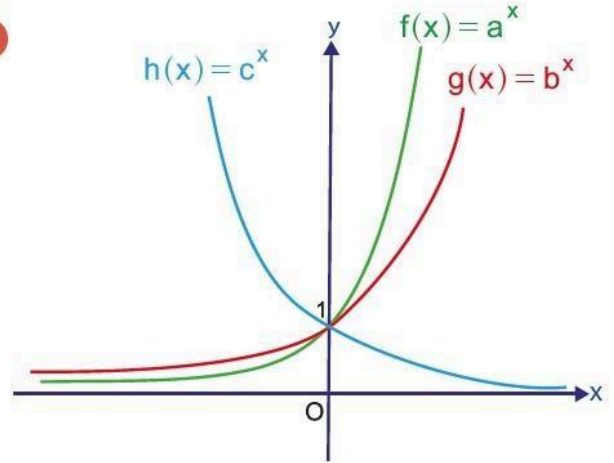
a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

ç) $f(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$

6



Yukarıda f , g ve h üstel fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre a , b ve c arasındaki sıralamayı bulunuz.

7

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisi veya hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = (-2)^x$

ç) $f(x) = \left(-\frac{1}{7}\right)^{x+1}$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

d) $f(x) = 100^{x-1}$

c) $f(x) = 1^{x+2}$

e) $f(x) = (0,02)^x$

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....
.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2025
UYGUNDUR
Okul Müdürü
.....