Индукция.

3 сентября, 7-8 класс

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трёх клеток.

2. (Игра "Ханойская башня") Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

б) это можно сделать за 2^n-1 перекладываний.

3. Ваня нарисовал на плоскости треугольник. Сережа провел n прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

4. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

5. В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Докажите, что или из любого города в любой можно проехать на автомобиле, или из любого города в любой можно добраться на метро.

6. Есть очень много трех- и пятикопеечных монет. Какую сумму можно ими заплатить? (найдите все варианты и докажите, что других нет).

7. Докажите, что любое число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в двоичную систему счисления).

8. В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырёх полученных дуг и т.д. Такая операция проделывается n раз. Найти сумму всех полученных чисел.