Модулярная арифметика.

7 - 8 класс

Определение 1. Говорят, что **целое** число N делится на **целое** число *m*, если N можно представить в виде *N=km*, где *k* также целое число.

Определение 2. Разделить **целое** число N на **целое** число m с остатком означает представить N в виде $N = km + r$, где $0 \le r < |m|$. При этом неотрицательное число r называется **остатком от деления**, а целое число k неполным **частным**.

Определение 3. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если при делении на m они дают одинаковые остатки.

Определение 4. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если их разность делится на m.

1. Докажите, что определения 3 и 4 равносильны.

Свойства сравнений

- Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$;
- Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$;
- Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $ac \equiv bd \pmod{n}$;
- Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{n}$;
- Верно ли, что если $ac \equiv bc \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$?

2. Найдите остаток от деления:

a) числа 9^{100} на 8;

b) числа 12^{100} на 13.

c) числа 23^{49} на 7;

d) числа $2^{75} + 2^{76} + 2^{77} + 2^{78}$ на 5.

3. Найдите остаток от деления:

a) числа $7778\times7779\times7780\times7781\times7782\times7783$ на 7;

b) числа $1000\times1001\times1002\times1003 - 24$ на 999;

c) числа $1000\times1001\times1002\times1003$ на 1004.

4. Пусть $3x+7y \equiv 1 \pmod{11}$.

a) Показать, что $3x+40y \equiv 1 \pmod{11}$.

b) Найти остаток от деления $14x-15y$ на 11.

c) Найти остаток от деления $6x+3y$ на11.

5. Докажите, что любое натуральное число сравнимо со знакопеременной суммой его цифр по модулю 11.

6. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

Докажите, что при любом $n \in N$ число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^{n}$ делится на 7.