Ejercicios de Selectividad relacionados con Sistemas de Ecuaciones 2006-2009

Ejercicio 3.- a) [1’75 puntos] Discute según los valores λ el siguiente sistema:
3x+λy=0
x+λz=λ
x+y+3z=1

Solución

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+\lambda y \quad =0 \\ x+ \quad \lambda z=\lambda \\ x+\ \ y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\lambda^2-6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ y } \lambda=6$

Por tanto:

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$, r(A)=3=r(A*)= nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE DETERMINADO

Si $\lambda=0$, $r(A)=2$; $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $r(A^*)=r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=2$

r(A)=r(A*)=2< nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO

Si $\lambda=6$,

$r(A)=2$; $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $r(A^*)=r\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=36-6-18=12 \neq 0 \Rightarrow r(A^*)=3$

$r(A)=2 \neq r(A^*)=3$, luego el sistema será INCOMPATIBLE

b) [0’75 puntos] Resuélvelo para λ=0

b) $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x \quad\quad =0 \\ x \quad\quad\ =0 \\ x+\ \ y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z=t \Rightarrow y+3t=1 \Rightarrow y=1-3t \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=1-3t \\ z=t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

Solución

x cajas de 30 euros
y cajas de 20 euros
z cajas de 40 euros

Relaciones

$x + y + z = 1500$

$30x + 20y + 40z = 40500$, dividiendo por 10 tenemos, $3x + 2y + 4z = 4050$

x = 30% de 1500 = (1500).(30/100) = **450**. Luego nos queda

$y + z = 1500 – 450 = 1050$

$2y + 4z = 4050- 3(450) = 2700$. $F_2 – 2F_1$, nos da $2z = 2700 – 2.(1050) = 600$, de donde

z = 300, y por tanto **y** = 1050 – 300 = **750**

Lo que piden es el dinero que ha pagado en cada mercado

En el **primer mercado han pagado** 30.x = 30(450) = **13500 euros**
En el **segundo mercado han pagado** 20.y = 20(750) = **15000 euros**
En el **tercer mercado han pagado** 40.x = 40(750) = **12000 euros**

Ejercicio 3.- Dado el sistema de ecuaciones lineales
$x+\lambda y+z=4$
$x+3y+z=5$
$\lambda x+y+z=4$

a. [1’75 puntos] Discútelo según los valores de parámetro λ

Solución

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1\\ 1 & 3 & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{vmatrix}=3+\lambda^2+1-3\lambda-1-\lambda=\lambda^2-4\lambda+3 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A|=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow \Delta=16-12=4>0 \Rightarrow \lambda=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=\frac{4+2}{2}=3\\ \lambda=\frac{4-2}{2}=1\end{cases} \Rightarrow$$

$\forall\lambda \in R-\{1,3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A)=3=$Número incognitas $\Rightarrow$

Si $\lambda=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 1 & 4\end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -2 & -8\end{array}\right) \Rightarrow 0z=1 \Rightarrow \text{No existe valor que lo resuelva. Sistema Incompatible}$$

Si $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones. Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) [0’75 puntos] Resuélvelo en el caso λ=1 *b)*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2}+z=4 \Rightarrow x=4-\frac{1}{2}-z=\frac{7}{2}-z$$

Solución $\left(\frac{7}{2}-\mu, \frac{1}{2}, \mu\right), \mu \in R$

Ejercicio 3.- [1'25 puntos] a) Resuelve el sistema de ecuaciones

x+z=2

-x+y+2z=0

-x+2y+5z=2

Solución

(a)

$$\begin{cases} x \quad +z=2 \\ -x+y+2z=0 \quad E_2+E_1 \\ -x+2y+5z=2 \quad E_3+E_1 \end{cases} \approx \begin{cases} x \quad +z=2 \\ y+3z=2 \\ 2y+6z=4 \quad E_3+E_2(-2) \end{cases} \approx \begin{cases} x \quad +z=2 \\ y+3z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como tengo un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas es un sistema compatible determinado.
Tomo z = "m" nº real y me queda x = 2 – m e y = 2 – 3m.
Solución (x,y,z) = (2 – m, 2 – 3m, m) con "m" nº real.

b) [1'25 puntos] Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado a)

x+y+z=1

-x+y+3z=1

x+2y+λz=-3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$

Para que en principio este sistema tenga alguna solución común con el del sistema del apartado (a), tiene que ser compatible e indeterminado, es decir rango(A) = rango(A^*) = 2.
En A como para que tenga rango 2 su determinante tiene que ser cero, por tanto su determinante |A| tiene que ser 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

Si |A| = 0, tenemos 2λ – 6 = 0, de donde λ = 3.
Veamos si rango A^* es 2.

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2 \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= (-1)(-1)(-4-6) \neq 0$, tenemos que el rango A^* = 3, sea cual sea el valor de λ.

Si λ = 3, el sistema es incompatible al tener distintos rangos A y A^*. Si λ ≠ 3, el sistema tiene solución única, que por Cramer sería:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (1)/(\lambda - 3); \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (\lambda + 7)/(\lambda - 3); \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (-5)/(\lambda - 3)$$

Para que esta solución coincidiese con la del apartado (a) tendría que verificarse a la vez:
(1)/(λ – 3) = 2 – m; (λ + 7)/(λ – 3) = 2 – 3m y (-5)/(λ – 3) = m.
De (-5)/(λ – 3) = m, tenemos λ = 3 – 5/m
De (1)/(λ – 3) = 2 – m, tenemos 1 = 2λ – 6 – λm = λ(2 – m) – 6, luego λ = 7/(2 – m)

Si las λ fuesen iguales tendríamos 7/(2 – m) = 3 – 5/m, ecuación que tiene dos soluciones complejas en "m", por tanto no hay ningún valor de λ que haga que el sistema del apartado (b) tenga alguna solución del del sistema (a).

Ejercicio 3.- Sea el sistema de ecuaciones

$x+y=m+1$

$x+my+z=1$

$mx+y-z=m$

a. [1’5 puntos] Determina los valores de ***m*** para los que el sistema es compatible

Solución

a)

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = {Adjuntos 1ª fila} = 1(-m-1)-1(-1-m) = 0, rango(A) < 3 sea cual sea m de R.

En A utilizando las columnas 2 y 3 como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2, sea cual sea “m” de R.

En A^*, utilizando la columna 2, 3 (columnas con las que he formado el menor ≠ 0 de la matriz A) y la de los términos independientes tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$ tiene que ser 0, para que rango(A^*) = 2 y el sistema sea compatible.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$ = {Adjuntos 1ª fila} = $1(m+1)+(m+1)(-1-m) = -m^2 - m = 0$

Resolviendo $-m^2 - m = 0$, obtenemos m = -1 y m = 0, por tanto el sistema es compatible si y solo si **m = 0** y **m = -1**

b. [1 punto] Resuelve el sistema en el caso **m = -1**

b)

Lo resolvemos para m = -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2y+z=1 \Rightarrow z=1+2y \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow$$

$x=-y \Rightarrow$ Solución $(-\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$x + \lambda y - z = 0$$
$$2x + y + \lambda z = 0$$
$$x + 5y - \lambda z = \lambda + 1$$

a. [1’5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ¹ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} =$ $(1)(-\lambda - 5\lambda) - (\lambda)(-2\lambda - \lambda) + (-1)(9) = 3\lambda^2 - 6\lambda - 9$. (Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos |A| = 0, es decir $3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, de donde $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$

*Si $\lambda \neq$ **-1 y** $\lambda \neq$ **3**, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si λ = **-1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si 1 = **3**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(1-6) = -20 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

b. [1 punto] Resuélvelo $\lambda = -1$.

Nos piden resolverlo si $\lambda = -1$.

Hemos visto que *como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$2x + y - z = 0$

$x + 5y + z = 0$. Tomamos $z = \lambda$ Î R

A la 1ª ecuación le sumo la 2ª multiplicada por -2, y tenemos $-9y = 3\lambda$. De donde $y = (-1/3)\lambda$.

Sustituyendo en $x + 5y + z = 0$, nos resulta $x = (2/3)\lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = ((2/3)\lambda, (-1/3)\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$

Ejercicio 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y + z = a - 1$$
$$2x + y + az = a$$
$$x + ay + z = 1$$

a. [1’5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF-(2).1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 2)(a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = 2

*Si **a ≠ 1 y a ≠ 2**, tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \end{vmatrix} 2^aF-3^aF = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b) [1 punto] Resuelve el caso a = 2.

Si **a = 2**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos columnas son iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

x + y + z = 1

2x + y + 2z = 2. Tomamos z = λ ∈ R

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

x = 1 – λ . Sustituyendo en x + y + z = 1, nos resulta y = 0.

La solución del sistema es (x, y, z)= (1 – λ , 0, λ) con λ ∈ R

Ejercicio 3. [2’5 puntos] Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$
$$ky + z = 0$$

$$x + (k + 1)y + kz = k + 1$$

a. [1'25 puntos] Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) [1'25 puntos] Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga z = 2.

Resuelto en clase.

Ejercicio 3. (a) [1 punto] Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= mx \\ x + 2y + z &= my \\ x + 2y + 4z &= mz \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=mx \\ x+2y+z=my \\ x+2y+4z=mz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$

Como es un sistema homogéneo, el sistema tiene más de una solución cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}_{3^a+2^a(-1)} = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 0 & m & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)[(2-m)(3-m)-m] - 1(3-m-m) =$$

$= -m^3 + 8m^2 - 16m + 9$

Para resolver $m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$, aplicamos Ruffini

	-1	8	-16	9
1		-1	7	-9
	-1	7	-9	0

Una solución es m = 1, y las otras salen de resolver la ecuación $-m^2 + 7m - 9 = 0$, obteniéndose $m = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$

Por tanto para m = 1, $m = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$ el sistema tiene más de una solución

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.

En el caso de m = 0, solo tiene la solución trivial (x,y,z) = (0,0,0)

En el caso de m = 1, tiene infinitas soluciones. Tomo las ecuaciones 2ª y 3ª (con ellas el rango de A es 2)

$x + y + z = 0$

$x + 2y + 3z = 0$. Hacemos $z = \lambda \in R$

$x + y = -\lambda$

$x + 2y = -1$. 2ª + 1ª(-1), y nos resulta $y = -2\lambda$ y $x = \lambda$, por tanto la solución del sistema para m = 1 es

$(x,y,z) = (\lambda , -2\lambda , \lambda)$ con $\lambda \in R$

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

a. [1'5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^aF-3^aF \\ 2^aF-3^aF \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(-a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 1)(-a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = -1

*Si **a ≠ 1 y a ≠ -1** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ \cdots \end{vmatrix} 2^aF-1^aF = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ \cdots \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si **a = -1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como tenemos dos filas iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A)y dos incógnitas principales..

Lo resolvemos para a = -1

-x + y + z = 4

x + y + z = 1. Tomamos z = λ

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

2x = -3, de donde x = -3/2

y = 1 – x – z = 1 + 3/2 - λ = 5/2 - λ

La solución del sistema es (x, y, z)= (-3/2, 5/2 - λ , λ) con λ ∈ R

(b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para a = –2.

(b)

Resolvemos el sistema para a = -2.

Nuestro sistema es

-2x + y + z = 4

x + 2y + z = 1

x + y + z = 0

A la 2ª le resto la 3ª, y a la 1ª le sumo la 3ª multiplicada por 2, con lo cual nos queda

3y + 3z = 4

y = 1

x + y + z = 0

Con y = 1 entrando en la 1ª tenemos z = 1/3.

Con y = 1 y z = 1/3, entrando en la 3ª tenemos x = -4/3

La solución del sistema es (x, y, z) = (-4/3, 1, 1/3)

También se puede hacer por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3};\ y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1;\ z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3}$$

Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (-4/3, 1, 1/3) cuando a = -2.

Ejercicio 3. (a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

(a)

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; det(A) = $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}_{3^a F+1^a F(-1)} = \begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}$ = 1(1+1) = 2

$A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$;

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

b. [1’5 puntos] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

(b)

El sistema $\left.\begin{array}{l}x+y=1\\y+z=-2\\x+z=3\end{array}\right\}$ en forma matricial es A.X = B, con $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Como existe A^{-1}, multiplicando por la izquierda A.X = B por A^{-1}, tenemos

$A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B = (1/2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = (1/2)\begin{pmatrix}6\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, es decir la solución es (x,y,z) =(3,-2,0)

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c}x+y+z=0\\2x+\lambda y+z=2\ .\\x+y+\lambda z=\lambda-1\end{array}$$

a. [1’5 puntos] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

$$x + y + z = 0$$
$$2x + \lambda y + z = 2 .$$
$$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de (A) por lo menos es 2.

El sistema será incompatible si rango (A) = 2 ≠ rango (A^*) = 3

Para que rango (A) = 2, |A| = o

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a C - 1^a C \\ 3^a F - 1^a C \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$ $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$

De |A| = 0, obtenemos $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ de donde $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$. Luego rango(A) = 2

Para que rango (A^*) = 3, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} 2^a C - 1^a C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$ $-3\lambda + 3$

Para que rango (A^*) = 3, $-3\lambda + 3 \neq 0$, resulta que $\lambda \neq 1$.

Como tiene que ocurrir que $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$ por un lado y por el otro $\lambda \neq 1$, la única posibilidad que nos queda es $\lambda = 2$.

Se puede comprobar y ver que es incompatible con $\lambda = 2$.

b. [1 punto] Resuelve el sistema para λ=1.

Si λ = 1, ya sabemos que es compatible e indeterminado por tanto nos quedamos ya con dos ecuaciones y dos incógnitas principales

x + y + z = 0

2x + y + z = 2 .

x + y + z = 0

Nos quedamos con la 1ª y la 2ª

x + y + z = 0

2x + y+ z = 2. Restando a la 2ª la 1ª , queda x = 2

Hacemos z = m

2 + y + m = 0

4 + y + 2m = 2, de donde y = - m – 2

Solución (x, y, z) = (2, - 2 – m, m) con m ∈ R

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (a + 1)y + 2z &= y \\ x - 2y + (2 - a)z &= 2z \end{aligned}$$

Solución

$$x + y + z = 0 \;\rightarrow\; x + y + z = 0$$

$$(a + 1)y + 2z = y \;\rightarrow\; ay + 2z = 0$$

$$x - 2y + (2 - a)z = 2z \;\rightarrow\; x - 2y - az = 0$$

Como vemos es un sistema homogéneo con matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial (0, 0, 0) el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser 0, es decir |A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a F - 1^a F \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -3 & -a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

Igualando a cero $-a^2 - a + 6 = 0$, tenemos como soluciones a = 2 y a = - 3

Si a = 2 y a = - 3 el sistema es compatible e indeterminado.

Si a = 2, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x + y + z = 0

2y + 2z = 0. de donde tomando z = m tenemos y = - m y x = 0

Solución (x, y, z) = (0, -m, m) con m ∈ R

Si a = - 3, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x + y + z = 0

-3y + 2z = 0. de donde tomando z = m, tenemos y = (2/3) m y x = (-5/3)m

Solución (x, y, z) = ((-5/3)m, (2/3)m, m) con m ∈ R

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$x+ my = m$$
$$mx+ y = m$$
$$mx+ my = 1$$

Solución

$$x+ my = m$$
$$mx+ y = m$$
$$mx+ my = 1$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ m & m \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Como el sistema es compatible tiene tres ecuaciones con dos incógnitas el determinante de la matriz ampliada $\det(A^*) = |A^*|$ tiene que ser cero. Para los valores que nos salgan de "m"· estudiaremos el sistema.

$\det(A^*) = |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - m^2) - m(m - m^2) + m(m^2 - m) = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$

Para resolver $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$, aplicamos primero Ruffini

	2	- 3	0	1
1		2	-1	-1
	2	- 1	-1	0

Cociente $2m^2 - m - 1 = 0$, que es una ecuación de 2º grado y sus soluciones son m = 1 y m = -1/2. Nos han salido como soluciones de m el 1 (doble) y el -1/2.

Si **m = 1** tengo tres ecuaciones iguales, por tanto elijo solo una

$x + y = 1$. Tomo $y = \lambda$ con lo cual $x = 1- \lambda$.

Solución $(x,y) = (1 - \lambda , \lambda)$ con $\lambda \in R$

Si **m = -1/2** tomo sólo dos ecuaciones, la 2ª y la 3ª.

$(-1/2)x + y = -1/2$.

$(-1/2)x + (-1/2)y = 1$. Resolviendo esta sistema sale $x = -1$ e $y = -1$

Solución $(x,y) = (- 1,-1)$

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$x + y + m z = 1$$
$$m y - z = -1$$
$$x + 2m y = 0$$

a. [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m.

Solución

(a)

$$x + y + m z = 1$$
$$m y - z = -1$$
$$x + 2m y = 0$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}_{3^a F - 1^a F} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} =$ $- m^2 + 2m - 1$

|A| = 0, nos dice que $- m^2 + 2m - 1 = 0$ y las soluciones son m = 1 (doble)

Si m ≠ 1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

b. [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Si m = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{3^a F - 3^a F)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Este es el caso que nos piden resolver.

(b)

Hemos visto que para **m = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 2 por tanto sólo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 1ª y 2ª ecuación.

x + y + z = 1

+ y – z = - 1.

Tomando z = a ∈ R obtenemos y = – 1 + a y x = 2 – 2a, luego la solución del sistema para **m = 1** es (x, y, z) = (2 – 2a, – 1 + a, a) con a ∈ R

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x + y - z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

a. [1’5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(a)

$$\lambda x + y - z = 1$$

$$x + \lambda y + z = \lambda$$

$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}_{2^a F + 1^a F} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$

$= (-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ $0 + \lambda(\lambda^2 + \lambda - \lambda - 1) = \lambda(\lambda^2 - 1)$

$|A| = 0$, nos dice que $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ de donde $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $\lambda = 0$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $-1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $1(1-0) = 1 \neq 0$, rango(A^*) = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible

Si $\lambda = 1$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $2 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos filas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Si λ = -1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 ¹ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos columnas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

b. [1 punto] Resuélvelo para λ = 2.

Lo resolvemos para λ = **2**. El sistema es

2x + y – z = 1

x +2 y + z = 2

x + y + 2z = 4. Cambiamos la 1ª ecuación por la 2ª y después 2ª + 1ª(-2) y 3ª + 1ª(-1)

x + 2y + z = 2

0 - 3y -3z = -3

0 - y + z = 2. Dividimos la 2ª por (-3) y después 3ª + 2ª

x + 2y + z = 2

0 +y +z = 1

2 z = 3. De donde z = 3/2, y = -1/2 y x = 3/2.

La solución del sistema es (x,y,z)= (3/2, -1/2, 3/2)

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x - y - z = -1$$
$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

a. [1’5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

Solución

$\lambda x - y - z = -1$

$x + \lambda y + z = 4$

$x + y + z = \lambda + 2$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(-1) \\ 3^aC+1^aC(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ = (desarrollamos por el adjunto 31) =

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(-1 - \lambda) = (\lambda - 1)(1 + \lambda)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir $(\lambda - 1)(1 + \lambda) = 0$, de donde $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y

 $\lambda \neq$ **-1**, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es comp

tiene solución única.

Si λ = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(1) \\ 3^aC+1^aC(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si λ = -1, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

b. [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Resuelve el sistema para λ = 2.

Nuestro sistema es

$2x - y - z = -1$

$x + 2y + z = 4$

$x + y + z = 4$

Sumando 1ª y 3ª tenemos 3x = 3, de donde x = 1. Tomamos la 1ª y la 2ª con x = 1

$2 - y - z = -1$

$1 + 2y + z = 4$

Sumándolas tenemos 3 + y = 3, de donde y = 0.

Sustituyendo x = 1 e y = 0 en cualquier ecuación tenemos z = 3, por tanto la solución del sistema es (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando λ = 2.

También se puede hacer por la regla de Cramer (Vicenta Serrano)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10+13}{3} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11+2+4-8}{3} = 3$$

Y como vemos, se obtiene la misma solución (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando λ = 2.

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$x - y + z = 2$$
$$x + l\,y + z = 8$$
$$l\,x + y + l\,z = 10$$

a. [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(a)

$$x - y + z = 2$$

$$x + \lambda y + z = 8$$

$$\lambda x + y + \lambda z = 10$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$, sea cual sea el λ porque tiene dos columnas iguales. Por tanto rango(A) < 3 siempre.

En A^*, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 8 \\ \lambda & 1 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a C + 1^a C \\ 3^a C + 1^a C(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 6 \\ \lambda & \lambda+1 & 10-2\lambda \end{vmatrix} =$ $(\lambda +1)(10-2\lambda) - 6(\lambda +1) = (\lambda +1)(-2\lambda +4)$

(l +1)(-2l +4) = 0 nos da $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ rango(A^*) = 3 ¹ rango(A) por tanto por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

En A como las tres filas son proporcionales, tenemos que rango(A) = 1, luego todos los menores de orden dos son cero.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$ $6 \neq 0$, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = 1 ≠ rango(A^*) = 2, el sistema es incompatible

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 2.

Si $\lambda = 2$

Ya sabemos que rango(A^*) = 2, del apartado "si λ = -1"

En $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$ 3 ¹ 0, rango(A) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado. Tomaremos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomo las dos primeras.

$x - y + z = 2$

$x + 2y + z = 8$, $2^a + 1^a (-1)$

$x - y + z = 2$

$3y = 6$, de donde $y = 2$. Haciendo $z = m \in R$, tenemos $x = 4 - m$, y la solución del sistema es $(x,y,z) = (4-m,2,m)$

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$x + y - z = -4$$

$$3X + \lambda y + z = \lambda - 1$$
$$2x + \lambda y = -2$$

a. [1’25 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(a)

$$x + y - z = -4$$
$$3X + \lambda y + z = \lambda - 1$$
$$2x + \lambda y = -2$$

La matriz de los coeficientes es

y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 2 & \lambda & 0 & -2 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix}_{2^a F + 1^a F} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix} =$ (-1)(4λ - 2λ - 2) = -2λ + 2

|A| = 0, nos dice que -2λ + 2 = 0 de donde λ = 1.

Si λ ≠ 1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

(b) [1’25 puntos] Resuelve el sistema para λ = 1.

(b)

Si λ = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{1^a F + 3^a F(-2)} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 2ª y 3ª

3x + y + z = 0

2x + y = -2. Tomando z = a ∈ R obtenemos x = 2 – a e y = -6 + 2a, luego la solución del sistema para ı = 1 es (x, y, z) = (2 – a, -6 + 2a, a) con a ∈ R