

CORRECTION CENTRALE II TSI 2010

Par Anne-Marie Beninger (TSI2 Marseille) et Anne Gaulier (TSI2 Montbéliard)

Partie I : Préliminaires

I.A Longueur d'onde : $\lambda = c T = c/f = 1,62 \cdot 10^3 \text{ m}$

I.B Onde plane progressive selon les z croissants, polarisée suivant Oy :

$$\vec{E} = E_0 \exp \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_y \text{ avec } k = \omega/c$$

I.C Onde plane progressive donc $\vec{B} = (\vec{u}_z \wedge \vec{E})/c = -\frac{E_0}{c} \exp \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_x$

I.D On revient en réel (!) pour calculer $\vec{\pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

I.E La puissance rayonnée à travers une surface S est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface d'où $P = \langle \vec{\pi} \rangle \cdot S$ soit $E_0 = (2\mu_0 c P/S)^{1/2} = 3,9 \text{ V.m}^{-1}$

I.F Si les antennes rayonnent dans toutes les directions de l'espace, il faudrait utiliser le modèle d'onde sphérique et non plus celui d'onde plane : E_0 varie en $1/r$.

I.G Les récepteurs radios couramment utilisés sont de petite taille devant la longueur d'onde : on peut donc considérer le champ électrique comme uniforme sur ces récepteurs et donc garder le modèle d'onde plane.

Partie II : Propagation dans l'atmosphère

II A Propagation ionosphérique des grandes ondes

II.A.1) $\vec{k} = \frac{\omega}{c} (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$

II.A.2) Onde plane progressive donc :

$$\vec{B} = (\vec{k} \wedge \vec{E})/\omega = \frac{E_0}{c} \exp \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) (\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_x)$$

II.A.3) a) Le conducteur s'oppose à la propagation de l'onde incidente en créant un courant induit qui donne naissance à l'onde réfléchie qui est donc à la même pulsation.

b) Le courant induit correspond au mouvement des électrons qui est parallèle au champ électrique incident et qui crée le champ électrique de l'onde réfléchie qui est donc parallèle au champ incident : la polarisation ne change pas.

c) Le champ électrique de l'onde réfléchie vérifie la même équation de propagation que celle du champ incident donc $k = k' = \omega/c$.

d) On a $\vec{k}' = \frac{\omega}{c} (\sin\alpha' \vec{u}_x - \cos\alpha' \vec{u}_z)$.

La relation de passage en $z = h$, le champ électrique étant nul dans le conducteur donne en projection sur Oy :

$$E_0 \exp j(\omega t - kx \sin\alpha - kh \cos\alpha) + E'_0 \exp j(\omega t - k'x \sin\alpha' + k'h \cos\alpha') = 0$$

Cette égalité est vraie quel que soit x donc $k \sin\alpha = k' \sin\alpha'$ avec $k = k'$: on retrouve la loi de Descartes pour la réflexion : $\alpha = \alpha'$.

e) De l'égalité précédente, on tire : $E'_0 = -E_0 \exp(-2j\frac{\omega}{c}h \cos\alpha)$

Le signe indique que le champ électrique de l'onde réfléchie est en opposition de phase avec le champ de l'onde incidente.

f) On a donc $\vec{E}' = -E_0 \exp \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x \sin\alpha - (z - 2h)\cos\alpha)\right) \vec{u}_y$

g) Onde plane progressive donc $\vec{B}' = (\vec{k}' \wedge \vec{E}')/\omega$

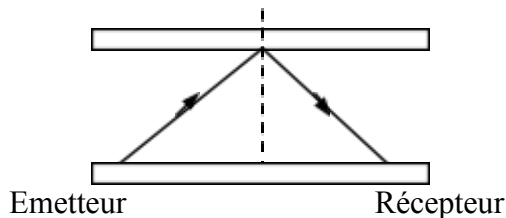
$$\vec{B}' = -\frac{E_0}{c} \exp \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x \sin\alpha - (z - 2h)\cos\alpha)\right) (\sin\alpha \vec{u}_z + \cos\alpha \vec{u}_x)$$

h) Champ électrique résultant :

$$\vec{E}_T = 2j E_0 \exp \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x \sin\alpha + h \cos\alpha)\right) \frac{\omega}{c}(h - z) \cos\alpha \vec{u}_y$$

On a un terme correspondant à la propagation selon Ox, un terme stationnaire dans le plan $x = \text{cte}$.

II.A.4 Il est donc possible de recevoir les grandes ondes pour des récepteurs situés à plusieurs centaines de kilomètres ($h = 100 \text{ km}$) grâce à la réflexion de ces ondes sur l'ionosphère.



II.B Détermination des conditions de réflexion de l'onde par l'ionosphère

II.B.1 Equation de Maxwell Faraday : $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

En complexe, $\vec{rot} \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B}$: on retrouve la relation pour une onde plane

progressive d'où $\vec{B} = (\vec{k} \wedge \vec{E})/\omega = -\frac{E_0}{c} \exp \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_x$

II.B.2 Principe fondamental à un électron : $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$

II.B.3 $\frac{\|\vec{F}_{mag}\|}{\|\vec{F}_{el}\|} \leq \frac{\|\vec{v}_e\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{v_e}{c} \ll 1$ (modèle non relativiste) : l'influence du champ magnétique est

négligeable devant celle du champ électrique.

II.B.4 $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$: en complexe $j\omega m \vec{v}_e = -e\vec{E}$ soit $\vec{j} = \frac{ne^2}{j\omega m} \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}$

Donc $\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{j\omega m}$

II.B.5 $P_{\text{cédée}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{ne^2}{j\omega m} E_0^2 \right) = 0$: L'onde électromagnétique ne cède pas de puissance en moyenne au plasma : le milieu est non absorbant.

II.B.6 Equation de Maxwell Ampère :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t)$$

II.B.7 En utilisant les quatre équations de Maxwell ($\rho = 0$, milieu neutre) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \epsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 \right)$$

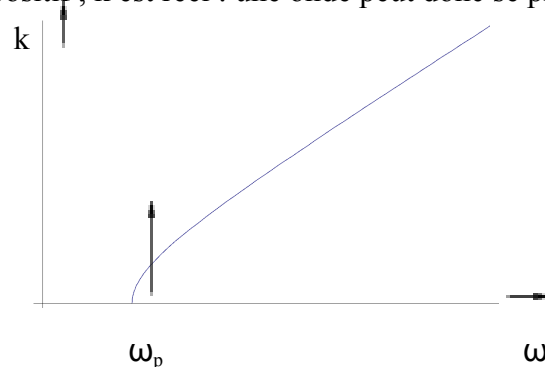
En complexe : $k^2 \vec{E} = -\mu_0(j\omega \underline{\sigma} \vec{E} - \epsilon_0 \omega^2 \vec{E})$ d'où $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$ avec $\omega_p = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$

II.B.8 Si $\omega < \omega_p$, k^2 est négatif donc k est imaginaire pur. En remplaçant k par $j\alpha$, a réel, dans la phase du champ électrique, on obtient $\vec{E} = E_0 \exp \exp j(\omega t) \exp(-\alpha z) \vec{u}_y$

Il ne s'agit plus du champ d'une onde progressive : il ne peut donc pas y avoir propagation pour ces fréquences.

II.B.9 a) Si $\omega > \omega_p$, k^2 est positif, k est réel : une onde peut donc se propager à cette pulsation.

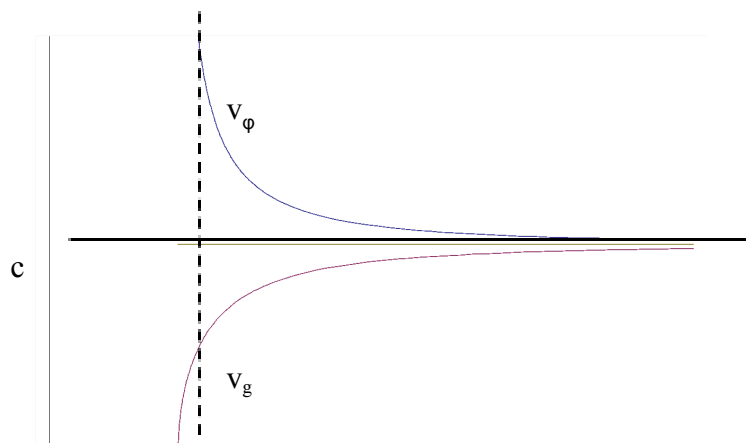
k est positif pour une propagation selon les z croissants.



b) vitesse de phase : $v_\phi = \omega/k = \omega c / \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

vitesse de groupe : $v_g = d\omega/dk = (1 / dk/d\omega) = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} c / \omega$ (hors programme TSI)

c)



$$\omega_p$$

$$\omega$$

d) La vitesse de phase est supérieure à c : l'indice du plasma est donc inférieur à 1 contrairement aux milieux transparents en optique.

e) La vitesse de groupe correspond à la propagation de l'énergie électromagnétique et est donc toujours inférieure ou égale à c. (hors programme TSI)

II.B.10 D'après l'étude précédente, seule une onde de pulsation supérieure à ω_p peut se propager dans le plasma : $f_p = \omega_p/2\pi$ correspond à la fréquence de coupure d'un filtre passe-haut. Une onde de fréquence inférieure ne pourra pas se propager et donc sera réfléchiée totalement.

II.C Confrontation du modèle aux grandes ondes d'Europe 1

II.C.1 fréquence moyenne du plasma : $f_p = 2840$ kHz

II.C.2 On constate que la fréquence des grandes ondes d'Europe 1, 185 kHz, est inférieure à la fréquence du plasma. D'après l'étude précédente, ces ondes ne peuvent donc pas se propager dans l'ionosphère.

II.C.3 L'onde ne pouvant se propager dans l'ionosphère est donc réfléchiée totalement.

II.C.4 Les grandes ondes peuvent donc être reçues à des centaines de km grâce à la réflexion ionosphérique. Mais elles ne peuvent pas être utilisées pour des liaisons satellites qui utilisent des ondes de très hautes fréquences qui peuvent donc traverser l'ionosphère.

Partie III Etude d'un filtre

III A 1. AO idéal en régime linéaire : $i^+ = i^- = 0$ et $V^+ = V^-$.

III A 2 impédance d'un condensateur $Z_c = \frac{1}{jC\omega}$

a) En basse fréquence $Z_c \rightarrow \infty$, coupe-circuit on a alors $v_e = V^+$ (car $i^+ = 0$)
D'où $v_e = V^+ = V^- = v_s$ soit une fonction de transfert $\underline{H} = 1$

b) En haute fréquence $Z_c \rightarrow 0$, court-circuit on a alors $V^+ = 0$ (car relié à la masse)
D'où $v_s = V^- = V^+ = 0$ soit une fonction de transfert $\underline{H} = 0$.

c) Le filtre est donc passe-bas.

III B 1. On a toujours $v_s = V^- = V^+$
On applique le théorème de Millman

$$\text{en A} \quad V_A = \frac{\frac{v_e}{R} + \frac{v_s}{R} + 2jC\omega v_s}{\frac{2}{R} + 2jC\omega} \quad \text{en E}^\pm : v_s = \frac{\frac{v_A}{R} + 0}{\frac{1}{R} + jC\omega}$$

en éliminant V_A entre ces deux équations on obtient : $\underline{H} = \frac{1}{1 - 2R^2C^2\omega^2 + 2jRC\omega}$

$$\text{soit } H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}f_0}$$

On retrouve bien $\underline{H} \rightarrow 1$ en BF et $\underline{H} \rightarrow 0$ en HF

$$\text{III B 2} \quad \underline{v_s} = \underline{H} \cdot \underline{v_e} \quad V_{sm} \exp(j\phi_s) = \underline{H} V_{em} \exp(j\phi_e)$$

$$\text{a) } V_{sm} = |\underline{H}| V_{em},$$

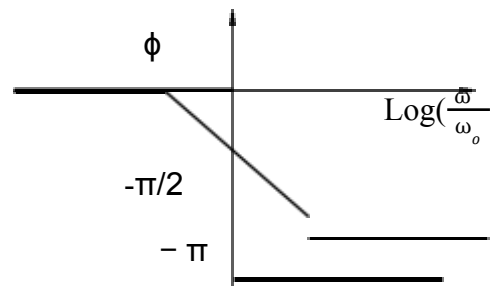
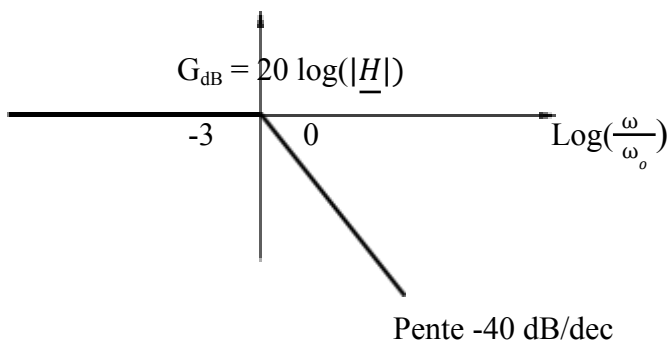
on mesure les amplitudes V_{sm} et V_{em} avec un oscilloscope ou un voltmètre

$$\text{b) } \phi_s = \arg(\underline{H}) + \phi_e, \text{ on mesure le déphasage } \phi_s - \phi_e \text{ avec un oscilloscope.}$$

$$\text{III B 3 a) } |\underline{H}|^2 = \frac{1}{(1 - 2R^2 C^2 \omega^2)^2 + 4R^2 C^2 \omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^4}{\omega_o^4}}$$

III B 3 b) c)

	$\underline{H}$	$ \underline{H} $	G_{dB}	$\phi = \arg(\underline{H})$
$\omega \ll \omega_o$	1	1	0	0
$\omega = \omega_o$	$\frac{1}{j\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3	$-\pi/2$
$\omega \gg \omega_o$	$-\frac{\omega_o^2}{\omega^2}$	$\frac{\omega_o^2}{\omega^2}$	$40 \log \omega_o - 40 \log \omega$	$-\pi$



La pulsation de coupure à -3 dB est ω_o

Partie IV Modulation et démodulation d'amplitude

$$\text{IV A } f_{m1} = 300 \text{ Hz} \quad \lambda_1 = 1000 \text{ km} \quad f_{m2} = 4500 \text{ Hz} \quad \lambda_2 = 67 \text{ km}$$

Une antenne demi-onde aurait une taille comprise entre 33 et 500 km : irréalisable !!

Il faut une porteuse de fréquence bcp plus grande, donc de longueur d'onde bcp plus petite.

Cette onde portera des signaux de fréquences variées, donc un avantage supplémentaire

C'est la conclusion anticipée de toute la suite du pb !

$$\text{IV B 1. D'après le schéma-bloc : } s(t) = p(t) + k.p(t).e(t) = A_p(1 + k.A_m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_{port} t)$$

$$\text{On pose } m = k.A_m$$

IV B 2 la courbe est une sinusoïde de période T_{port} , dont l'amplitude varie avec une période plus importante T_m .

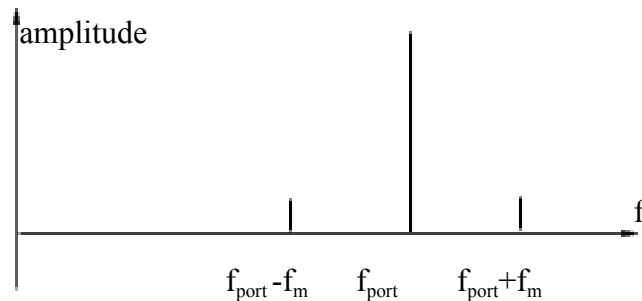
$$\text{On lit sur le graphe } T_{port} = 5 \mu s \quad d'où \quad f_{port} = 200 \text{ kHz}$$

$$T_m = 250 \mu s \quad d'où \quad f_m = 4 \text{ kHz}$$

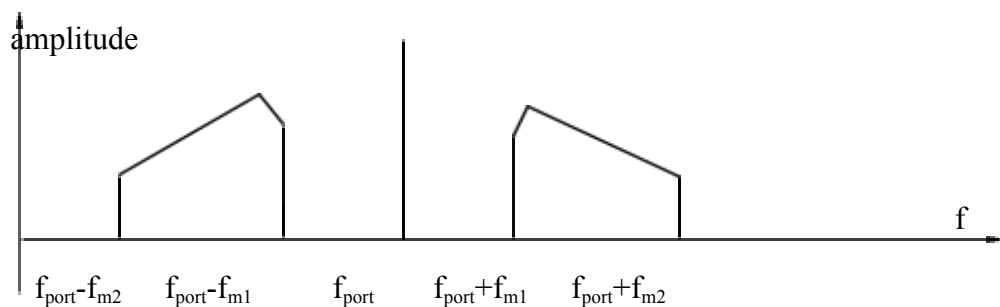
L'amplitude du signal varie entre $A_p(1+m) = 2,7 \text{ V}$ et $A_p(1-m) = 1,6 \text{ V}$
 (pb symétrie / 0 courbe ?) d'où $A_p = 2,1 \text{ V}$ $m = 0,26$

IV B 3 en utilisant $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$$s(t) = A_p \cdot \cos(2\pi f_{\text{port}} t) + A_p \cdot \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} + f_m)t) + A_p \cdot \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} - f_m)t)$$



IV B 4 a)



IV B 4 b) la bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal $s(t)$ est donc
 $[f_{\text{port}} - f_{m2}, f_{\text{port}} + f_{m2}]$ soit $[180,5 \text{ kHz} ; 189,5 \text{ kHz}]$

Filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = f_{\text{port}} / \Delta f = 20$

- c) La bande passante est assez étroite pour que les différents signaux modulateurs puissent être récupérés par une même antenne.

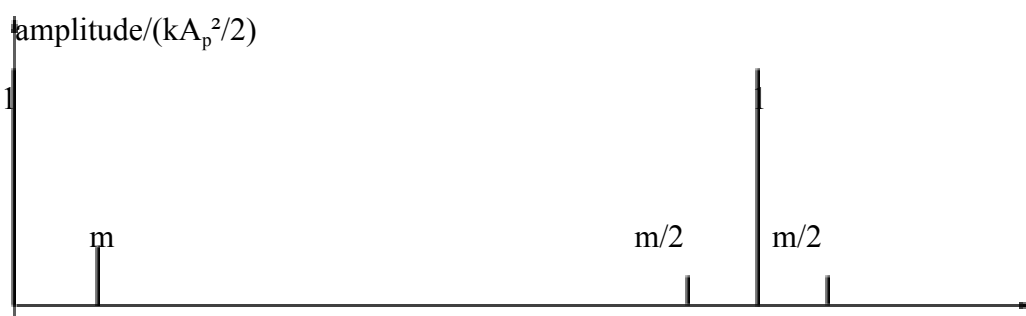
Les antennes émettrices d'Europe 1 ont des hauteurs de 270, 276, 280 et 282m, soit environ $\lambda/6 \dots$

IV C Démodulation

$$s'(t) = k \cdot p(t) \cdot s(t)$$

$$= k \cdot A_p \cdot \cos(2\pi f_{\text{port}} t) \cdot [A_p \cdot \cos(2\pi f_{\text{port}} t) + A_p \cdot \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} + f_m)t) + A_p \cdot \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} - f_m)t)]$$

$$= k A_p^2 / 2 \cdot [1 + \cos(2\pi 2f_{\text{port}} t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_{\text{port}} + f_m)t) + m \cos(2\pi f_m t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_{\text{port}} - f_m)t)]$$



f

$$0 \quad f_m \quad 2f_{\text{port}} - f_m \quad 2f_{\text{port}} \quad 2f_{\text{port}} + f_m$$

IV C 2 a) le filtre passe-bas (1) élimine les 3 fréquences les plus élevées, il reste donc la composante continue et l'harmonique à f_m : $s''(t) = k A_p^2/2 \cdot [1 + m \cos(2\pi f_m t)]$.

IV C 2 b) on veut $G_{\text{dB}}(2f_{\text{port}}) = -80 \text{ dB} = 40 \log\left(\frac{f_o}{2f_{\text{port}}}\right)$ d'où $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}RC} = 0,02 f_{\text{port}}$

$$R = \frac{1}{2\pi\sqrt{2} \cdot 0,02 \cdot f_{\text{port}}} = 30,4 \text{ k}\Omega$$

c) Le condensateur C' élimine la composante continue : $d(t) = k A_p^2/2 \cdot m \cos(2\pi f_m t)$

d) le filtre passe-bas (2) élimine l'harmonique à f_m : $a(t) = k A_p^2/2$

e) la fréquence de $d(t)$ est f_m , le rapport des amplitudes de $d(t)$ et $a(t)$ est $m = kA_m$

l'analyse de $d(t)$ et $a(t)$ permet donc de reconstituer le signal modulant $e(t) = A_m \cdot \cos(2\pi f_m t)$