Chapitre 1
Nombres complexes, partie algébrique

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré. À cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation i apparaît en 1777 avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au XIXème siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

I. L'ensemble ℂ

1. Définition

Définition 1
Il existe un ensemble de nombres, noté ℂ, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- ℂ contient ℝ.
- Dans ℂ, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans ℝ.
- Il existe dans ℂ un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Tout élément z de ℂ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples
$3 + 4i$; $-2 - i$ et $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Vocabulaire
- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle la **partie réelle** et le nombre $\boldsymbol{b}$ s'appelle la **partie imaginaire**.

On note $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

Remarques
- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors z est un nombre **imaginaire pur**.
- $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ $i^5 = i$ $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ $i^8 = 1$ ...

  D'une manière générale, $i^n = i^r$ où r **désigne le reste** de la division euclidienne de n par 4. Ainsi,
  $$2001 = 4\times500 + 1$$
  Donc
  $$i^{2001} = i^1 = i$$

Méthode
Effectuer des calculs sur les nombres complexes
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/-aaSfL2fhTY**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ**
Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.
$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\qquad$ $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\qquad$ $z_3 = (2 - 3i)^2$

$z_4 = (2i)^{13}$ $\qquad$ $z_5 = \frac{1}{4-2i}$ $\qquad$ $z_6 = \frac{1+i}{2-i}$

Solution

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$

$z_1 = 3 - 5i - 3i + 4$

$z_1 = 7 - 8i$

$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$

$z_2 = -3 + 15i + 2i - 10i^2$

$z_2 = -3 + 15i + 2i + 10$

$z_2 = 7 + 17i$

$z_3 = (2 - 3i)^2$

$z_3 = 4 - 12i + 9i^2$

$z_3 = 4 - 12i - 9$

$z_3 = -5 - 12i$

$z_4 = (2i)^{13}$

$z_4 = 2^{13} i^{13}$

$z_4 = 8192 \times \left(i^2\right)^6 \times i$

$z_4 = 8192 \times (-1)^6 \times i$

$z_4 = 8192i$

$z_5 = \frac{1}{4-2i}$

$z_5 = \frac{4+2i}{(4-2i)(4+2i)}$

$z_5 = \frac{4+2i}{16-4i^2}$

$z_5 = \frac{4+2i}{16+4}$

$z_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$

$z_6 = \frac{1+i}{2-i}$

$z_6 = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$z_6 = \frac{2+i+2i-1}{4+1}$

$z_6 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Propriété 1

- Deux nombres complexes sont **égaux** si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est **nul** si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Exemples d'application

- Déterminons les nombres complexes z vérifiant $2z - 5 = 4i + z$

Solution

$2z - 5 = 4i + z$

$\Leftrightarrow 2z - z = 5 + 4i$

$\Leftrightarrow z = 5 + 4i$

- Déterminons les nombres complexes z vérifiant $3z - 7 = 8i + 4iz$

Solution

On rappelle que

$3z - 7 = 8i + 4iz$

$\Leftrightarrow (3 - 4i)z = 7 + 8i$

$\Leftrightarrow z = \frac{7+8i}{3-4i} = \frac{(7+8i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{21+28i+24i-32}{3^2-(4i)^2} = \frac{-11+52i}{25}$

II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2

Soit un nombre complexe $z = a + ib$. On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\overline{z}$, égal à $a - ib$

Exemples

Si $z = 4 + 5i$ alors $\overline{z} = 4 - 5i$

On peut également noter que

$\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$ $\qquad$ $\overline{i} = -i$ $\qquad$ $\overline{5} = 5$

Propriété 2

Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a. $\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad$ b. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad$ c. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

d. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $\qquad$ e. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, $z \neq 0$ $\qquad$ f. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$

Démonstrations

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.

a. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

b. $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - ib - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$

Démonstrations analogues pour **c.** **e.** et **f.**

d. Soit $z \in C$, démontrons par récurrence la proposition $P(n)$: « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ »

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.

- **Hérédité**

Supposons $P(k)$ vraie et montrons $P(k + 1)$

$$\overline{z^k} = \overline{z}^k$$

Donc, d'après la propriété précédente,

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z} = \overline{z}^k \times \overline{z} = \overline{z}^{k+1}$

- **Conclusion**

La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n

$$\forall z \in C, \forall n \in N^*, \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Propriété 3

z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$ *z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$*

Démonstrations

$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0$

$z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + ib = -a + ib \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Remarque

$z + \overline{z} = 2Re(z) \in R$

$z - \overline{z} = 2i\,Im(z) \in iR$

Propriété 4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Démonstration

$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Méthode

Déterminer un conjugué

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/WhKHo9YwafE**

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = (2 - i)(i - 5)$ $z_2 = \frac{3+2i}{i}$

Solution

$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)(i - 5)}$

$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)}\,\overline{(i - 5)}$

$\overline{z_1} = (2 + i)(-i - 5)$

$\overline{z_1} = -2i - 10 + 1 - 5i$

$\overline{z_1} = -9 - 7i$

$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3+2i}{i}\right)}$

$\overline{z_2} = \frac{\overline{3+2i}}{\overline{i}}$

$\overline{z_2} = \frac{3-2i}{-i}$

$\overline{z_2} = \frac{(3-2i)\times i}{-i\times i}$

$\overline{z_2} = 2 + 3i$

Méthode

Résoudre une équation avec un conjugué

Résoudre les équations suivantes

$3i\overline{z} + 4 = -i + 3$ $2i\overline{z} + 2z = 8$

Solution

- En multipliant chaque membre par $-i$, puis en passant au conjugué, on obtient

$$3i\overline{z} + 4 = -i + 3 \Leftrightarrow 3i\overline{z} = -i - 1 \Leftrightarrow 3\overline{z} = -1 + i \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{-1+i}{3} \Leftrightarrow z = \frac{-1-i}{3}$$

$$S = \left\{\frac{-1-i}{3}\right\}$$

- On pose $z = a + ib$ où $a, b \in R$

$2i\overline{z} + 2z = 8 \Leftrightarrow 2i(a - ib) + 2(a + ib) - 8 = 0 \Leftrightarrow 2b + 2a - 8 + (2a + 2b)i = 0 \Leftrightarrow 2b + 2a - 8 = 0 \; et \; 2a + 2b$

Cette équation ne possède **pas de solution** car $-8 \neq 0$

$$S = \emptyset$$

III. Formule du binôme de Newton

Théorème (Formule du binôme)

Soient deux nombres complexes a et b et un entier naturel $n \geq 1$.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Remarques

Le symbole $\sum_{i=0}^{n}$ désigne la somme de tous les termes où l'indice i prend successivement toutes les valeurs entières de 0 à n.

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$ s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal ou à l'aide de la formule

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Ce sont des combinaisons (voir cours sur le dénombrement en spécialité) : ainsi, $\binom{n}{i}$ désigne le nombre de possibilités de choisir i éléments parmi n sans remise (un élément ne peut être tiré qu'une seule fois) et sans tenir compte de l'ordre.

En remarquant que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, on peut aussi écrire

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

Démonstration au programme

Montrons la propriété P_n par récurrence :

$$\forall a, b \in C, \; (a + b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

- **Initialisation**

$$(a + b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

- **Hérédité**

  Supposons que la propriété P_k soit vraie

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

  Démontrons que la propriété P_{k+1} est vraie

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$$

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i\right)$$

  En développant,

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n+1-i}b^i + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^{1+i}$$

  Dans la deuxième somme, posons $j = i + 1$. Ainsi $i = j - 1$ et j prend les valeurs de 1 à $n + 1$ si i prend les valeurs (entières) de 0 à n. On obtient ainsi

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n+1-i}b^i + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j$$

i et j sont des indices muets donc ils sont interchangeables (on pourrait tout à fait les désigner par n'importe quelle lettre, autres que a, b et n naturellement). On obtient donc

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^{i} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i}$$

On retire alors le terme de rang 0 de la première somme et celui de rang $n+1$ de la deuxième puis on additionne les deux sommes restantes, soit

$$(a+b)^{k+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right) a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

Or, d'après la formule de Pascal,

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

Et en remarquant que

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \ et \ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

On obtient bien

$$(a+b)^{k+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^{i} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^{i}$$

- **Conclusion**
  La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul n. Donc

$$\forall a, b \in C,\ \forall n \in N^*, (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i}$$

Remarque
On peut aussi démontrer directement la formule à l'aide du dénombrement en utilisant la définition des combinaisons (c'est le cas d'ailleurs de la formule de Pascal).

Méthode
Appliquer la formule du binôme
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/UsYH9PvppPo**
Développer l'expression $(z+5)^6$.

Correction
$(z+5)^6 = \binom{6}{0} z^6 + \binom{6}{1} z^5 \times 5 + \binom{6}{2} z^4 \times 5^2 + \binom{6}{3} z^3 \times 5^3 + \binom{6}{4} z^2 \times 5^4 + \binom{6}{5} z \times 5^5 + \binom{6}{6} \times 5^6$

On construit un triangle de Pascal.

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**

On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.
$(z+5)^6 = 1z^6 + 6z^5 \times 5 + 15z^4 \times 5^2 + 20z^3 \times 5^3 + 15z^2 \times 5^4 + 6z \times 5^5 + 1 \times 5^6$
Soit

$$(z+5)^6 = z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2\,500z^3 + 9\,375z^2 + 18\,750z + 15\,625$$

Remarque
Pour le calcul des coefficients binomiaux, on peut aussi utiliser la formule

$$\binom{6}{1} = \frac{6}{1} = 6 \ \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15 \ \binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20 \ \binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = 15 \ \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$